Fuzzy集的表现理论及其应用

刘文奇 著



云南科技出版社

Fuzzy集的表现理论及其应用

Fuzzy Ji De Biaoxian Lilun Jiqi Yingyong

刘文奇　著

云南科技出版社

本书受云南省学术著作出版基金
云南省应用基础研究基金资助

责任编辑:单沛尧　赵　敏
封面设计:刘泓滨

Fuzzy 集的表现理论及其应用

刘文奇　著

云南科技出版社出版发行(昆明市书林街100号)
云南教育印刷厂印装

开本:850×1168　1/32　印张:5.5　字数:130千
1999年5月第1版　　1999年5月第1次印刷
印数:1—1000

ISBN 7-5416-1277-4/O·50　定价:15.00元

内容提要

本书系统地总结了 Fuzzy 集表现理论研究的成果。内容由集合套表现、随机集落影表现、软代数表示和高维 Fuzzy 集的变权合成等四个方面组成，涉及了迄今为止的所有表现方法。书中相当一部分内容系作者近期的工作。高维 Fuzzy 集的变权合成系 Fuzzy 集表现理论与决策分析的交叉领域，是近期发展起来的变权分析的基本内容，本书在第六章中作了系统归纳和发展。

本书可作为数学、管理学、系统工程等专业和相关专业的研究生及研究人员的参考用书。

序

众所周知，自1985年Zadeh, L.A.提出关于模糊集这一开创性工作之后，模糊数学的研究获得了迅速的发展，目前已经形成了一个具有广泛应用的新学科．在我国是蒲保明、刘应明两位教授于1977年率先发表论文，创造了模糊集的重于关系和模糊拓扑的有点化理论．现在我国学者已在国际模糊数学界占有重要地位，并且在模糊拓扑、模糊分析、模糊代数与模糊集的各种应用等方面于国内外出版了许多书著．

刘文奇同志的“模糊集的表现理论及其应用”一书，除相应地介绍了我国汪培庄、罗承忠、李洪兴、王国俊等教授的一些基础性相关工作外，特别是系统地综述了作者关于模糊集表现理论及应用方面的研究成果，其篇幅达全书的近一半之多．

注意到有关模糊集基础理论的书著迄今仍不多见，表现理论的专门著作更是空白．因此，本书的出版必定会引起广大同行们的兴趣，也必定有助于模糊数学研究的进一步发展．

吴从炘

1999年元月

前　　言

Fuzzy 集的表现理论是 Fuzzy 数学基础理论研究中最重要的内容之一. 自 Fuzzy 数学诞生之日起, 人们就开始研究 Fuzzy 集的表现问题. 最早的成果是截集表现定理, 它已经成为 Fuzzy 集论中基本定理之一.

作为截集表现定理的自然发展, 1983 年我国学者罗承忠首次引入了集合套概念, 从而给出集合套定理. 这在理论上奠定了 Fuzzy 集论的基础 (针对 Zadeh 算子而言). 1991 年他又引入可列集合套把这一定理进行推广. 1995 年, 史福贵又引入 L_β 集合套与 L_α 集合套, 从而获得了 L - fuzzy 集的集合套定理; 1996 年, 他进一步建立了分子集合套理论. 这一系列成果使集合套表现理论成为 Fuzzy 集理论的基本组成部分, 同时也成为经典数学结构向 Fuzzy 数学结构过渡的主要桥梁. 现在, 集合套方法已是 Fuzzy 集论中主要的理论方法之一.

Fuzzy 集的另一表现方法是把 Fuzzy 集视为随机集的落影. 这是汪培庄和 Cpodman, I. R. 于 1985 年前后独立提出的. 它是 Fuzzy 统计与集值统计的基础. 落影表现理论的特点是应用背景更强. 可以根据二维随机变量的联合尺度分布来确定应用中 Fuzzy 算子的形式. 它体现了 Fuzzy 算子选择的灵活性, 也阐明了隶属函数的统计实质和客观性.

Fuzzy 集表现理论的第三个发展是向抽象的格表示论延

伸，成为现代格论的重要分支。在这一领域内，我国学者刘应明、王国俊等人已经在拓扑表示上取得了突出成就，在国际上具有重要影响。近两年，裴礼文等人也在软代数表示方面取得了一些成果。

Fuzzy 集表现理论的第四个发展是高维 Fuzzy 集的合成理论。这也是 Fuzzy 数学与决策分析的交叉领域。我国学者汪培庄于 1985 年首次提出了变权的思想。1995 年李洪兴给出了惩罚型变权的公理化描述使变权研究走上了数学轨道。1996 年，李洪兴又给出了混合型变权，从而使变权综合更具一般性。

综上所述，我国学者在 Fuzzy 集表现理论研究中处于国际领先水平。同时这些成果也显示了这一领域丰富的研究内容，体现了这一理论在整个 Fuzzy 数学中的重要地位。

我从 1994 年起师从罗承忠教授学习 Fuzzy 集表现理论，同时也受到李洪兴教授的直接指导。经过几年的学习和研究，获得了一些体会和成果。本书便是我对 Fuzzy 集表现理论的学习体会和研究成果的总结。

本书的结构大致是：第一章为全书的预备知识；第二章为集合套表现理论（其中第三、四、五节为本人的工作）；第三章为Fuzzy集的落影表现理论；第四章讨论软代数表示问题（其中第二、四节为本人工作）；第五章为本人在软代数上的可测结构方面的工作；第六章介绍高维 Fuzzy 集的合成与综合决策（其中第五、六节为本人工作）。

本书的写作基本上是以作者近年来的研究成果为主要内容。为了展现 Fuzzy 集表现理论的基本框架，书中也引用了前人的一些基础性工作，其中主要是汪培庄、罗承忠、李洪兴、王国俊等先生的工作。因此，本书还远不是全面介绍 Fuzzy 集表现理论的著作，特别是在抽象的格表示论方面还比较薄

弱．但由于目前条件所限，只有争取在今后修订版中有所作为，也期待着同仁们更权威的著作来解决这一问题．

即便是这样一本小册子，也绝非我个人的功劳．我要感谢罗承忠教授、李洪兴教授、张振良教授对我多年的指导．感谢汪培庄教授、王国俊教授等人，他们丰富的成果成为本书的基础．同时，对李继彬教授、何湘藩教授对本人的关心和对本书的热情推荐，以及吴从炘教授在眼科手术后不久还不允许长时间阅读的情况下仍热情地为本书作序深表谢意．

本书的顺利出版有赖于云南省学术著作出版基金会的资助和云南省自然科学学术著作评审委员会专家们的厚爱．同时，书中的主要成果曾获云南省自然科学基金的长期资助．在出版过程中，云南科技出版社提供了很大帮助，云南省新闻出版局法规处吴仕龙处长也给予了作者很多帮助．在此，向上述机构和个人致谢．

最后，我还要感谢的是我的夫人黄桃林女士，是她做了许多与本书内容无关但对本书形成非常重要的日常工作．

刘文奇 谨识

1998 年 12 月于昆明

目　录

Contents

第一章　Fuzzy集与格论概要

§1　经典集合及其运算

集合论是现代数学的基础. 集合是现代数学的最基本的概念之一,它之所以重要是由于它可以表现概念,即表示概念的外延.

与早期的集合论不同,现代数学中的集合是就某个更大的集合(即论域)而论的. 换言之,现代数学中的任一个集合都是某个更大的集合的子集.

设 X 为论域,X 中的一部分称为 X 的子集,常以 A、B、C、……记之. 称 X 中的个体(对象)为元素,以 x、y、z、……记之. 如果 x 属于 A, 则记为 $x\in A$; 否则,记为 $x\notin A$. 用 $\emptyset$ 表示空集,X 作为自身的子集仍以 X 记之。$\emptyset$ 和 X 是 X 的两个特殊的子集,也称作平凡子集. 我们把 X 的全体子集记为 $\mathscr{P}(X)$,称之为 X 的幂集,有时也记作 2^X. 若 X 为具有 n 个元素的有限集,则易知 X 的子集有 2^n 个.

对 $\forall A,\ B\in\mathscr{P}(X)$,定义

$A\cup B=\{x|x\in A$　或 $x\in B\}$

$A\cap B=\{x|x\in A$　且 $x\in B\}$

$A^c=\{x|x\notin A\}$

称 $A\cup B$ 为 A 与 B 的**并集**, $A\cap B$ 为 A 与 B 的**交集**,A^c 为 A 的补集.

设 A、B 是 X 的子集, 在 $\mathscr{P}(X)$ 中定义二元关系"$\subseteq$"

$A\subseteq B \Longleftrightarrow x\in A$ 时必有 $x\in B$

很容易证明，“$\subseteq$”具有下列性质：

(1) **自反性**：$A\subseteq A$;

(2) **对称性**：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Rightarrow A=B$;

(3) **传递性**：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$;

(4) $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cup B=B$;

(5) $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cap B=A$;

(6) $A\subseteq B\Longleftrightarrow B^c\subseteq A^c$;

(7) $\emptyset\subseteq A$, $A\subseteq X$ $(\forall A\in\mathscr{P}(X))$;

(8) $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$;

(9) $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$。

代数系统$(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,{}^c)$具有以下性质：

(1) 最大元 X 和最小元$\emptyset$，即 $A\cup\emptyset=A, A\cap\emptyset=\emptyset, X\cup A=X, X\cap A=A$;

(2) **交换律**：$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(3) **结合律**：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(4) **分配律**：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(5) **补余律**：$A\cup A^c=X$, $A\cap A^c=\emptyset$;

(6) **复原律(或对合律)**：$(A^c)^c=A$;

(7) **逆序律**：$A\subseteq B\Longleftrightarrow B^c\subseteq A^c$;

(8) **幂等律**：$A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(9) **吸收律**：$A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(10) **对偶律**：$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$;

(11) **完全分配律**：I, J_i 均为指标集，有

$$\bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J_i}A_{ij}\Big)=\bigcup_{f\in\prod\limits_{i\in I}J_i}\Big(\bigcap_{i\in I}A_{if(i)}\Big),\quad \bigcup_{i\in I}\Big(\bigcap_{j\in J_i}A_{ij}\Big)=\bigcap_{f\in\prod\limits_{i}J_i}\Big(\bigcup_{i\in I}A_{if(i)}\Big);$$

(12) **无限对偶律**：$\Big(\bigcup\limits_{t\in T}A_t\Big)^c=\bigcap\limits_{t\in T}A_t^c$, $\Big(\bigcap\limits_{t\in T}A_t\Big)^c=\bigcup\limits_{t\in T}A_t^c$ （T为指

标集).

设 2^X 为 X 到 $\{0, 1\}$ 的映射的全体,在 2^X 中记 $A(x)$ 为子集 A 的特征函数,即视 A 为映射

$$A:\ X \to \{0,\ 1\}$$

$$x \to A(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\in A\\ 0 & 当\ x\notin A\end{cases}$$

(其中 A 为 X 的子集). 记 $\vee=\sup$, $\wedge=\inf$, 并且在 2^X 中定义

$$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)$$

$$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)$$

$$A^c(x)=1-A(x)$$

则我们有

定理 1.1.1. $(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, ^c)$ 与 $(2^X, \cup, \cap, ^c)$ **同构.**

也就是说,一个 X 的子集可视为一个 X 到 $\{0, 1\}$ 的映射,反之亦然.

§2 Fuzzy 子集及其运算

设 X 为经典集合,为论域. 其经典子集 A 的特征函数 $A(x)$ 唯一确定,它指明了 $\forall x\in X$ 对 A 的隶属程度. 这种程度只有两个状态,即 0 和 1. 因此,它只能表现出"非此即彼"的精确概念的外延. 如果打破隶属程度只取 0 和 1 的限制而允许取[0, 1]中的任意值,则这样的隶属度就可以表现出"亦此亦彼"的模糊概念. 出于这样的考虑,Zadeh, L. A. 于 1965 年提出了"Fuzzy子集"这一概念. 这里"Fuzzy"一词意为模糊、不分明、弗晰等.

定义 1.2.1 给出映射 A: $X\to[0, 1]$, $x\to A(x)$, 则称 $A(x)$ 确定一个 X 的 **Fuzzy 子集**, $A(x)$ 称为 A 的**隶属度函数**,对具体的 $x_0\in X$, 称 $A(x_0)$ 为 x_0 对 A 的**隶属度.**

以后我们对 Fuzzy 子集与定义在 X 上取值于[0, 1]的函数不

加区分地使用。

全体 X 的 Fuzzy 子集构成的集合记为 $\mathscr{F}(X)$，称为 X 的 Fuzzy 幂集。显然 $\mathscr{F}(X)=[0, 1]^X$(即 X 到 $[0, 1]$ 映射的全体。特别当 $A(x)\in\{0, 1\}$ 时，A 退化为 X 的经典子集，所以经典子集可视为特殊的 Fuzzy 子集。换言之，$\mathscr{F}(X)$ 可视为 $\mathscr{P}(X)$ 的函数式扩张。

例 1.2.1 以人的年龄作为论域 X, Zadeh, L. A. 给出了“年老”O 与“年轻”Y 两个 Fuzzy 子集，它们的隶属度函数分别为

$$O(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & x>50\end{cases}$$

$$Y(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & x>25\end{cases}$$

图像如图 1.2.1.

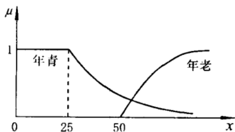


图 1.2.1

Fuzzy 集有各种表达方式，如图式

$$A=\{(x,\ A(x))\mid x\in X\}$$

有限论域上的分数式

$$A=\sum_{i=1}^{m}A(x_i)/x_i$$

(其中 $X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m\}$)

以及无限论域上的积分式

$$A=\int_X A(x)/x$$

常用下面三种标准函数表示 Fuzzy 集的隶属度函数，依它们的图形形状分别称为 S 型、Z 型和 π 型。

(1) S 型

$$S(x;\ a,\ b)=\begin{cases} 0 & x\leqslant a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2 & a<x\leqslant \dfrac{a+b}{2} \\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2 & \dfrac{a+b}{2}<x\leqslant b \\ 1 & x>b \end{cases}$$

其图像如图 1.2.2(a).

(2) Z 型

$$Z(x;\ a,\ b)=1-S(x;\ a,\ b)$$

其图像如图 1.2.2(b).

(3) π 型

$$\pi(x;\ a,\ b)=\begin{cases} S(x;\ b-a,\ b) & x\leqslant b \\ Z(x;\ b,\ b+a) & x>b \end{cases}$$

其图像如图 1.2.2.(c).

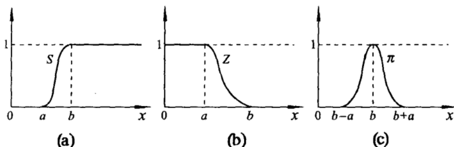


图 1.2.2

定义 1.2.2 设 A、$B\in\mathscr{F}(X)$，若 $\forall\ x\in X$ 有 $A(x)\leqslant B(x)$，则称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subseteq B$. 若 $\forall\ x\in X$，$A(x)=B(x)$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 真包含于 B，记作 $A\subset B$. 隶属度函数恒为零的 Fuzzy 集称为空集，记为 $\varnothing$. 隶属度函数恒为 1 的 Fuzzy 集称为全集，仍记为 X.

$\mathscr{F}(X)$ 中的二元关系有如下性质:

(1) $\varnothing \subseteq A \subseteq X$;

(2) $A \subseteq A$;

(3) $A \subseteq B$且$B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;

(4) $A \subseteq B$且$B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

综上所述，“$\subseteq$”满足自反性、传递性和对称性，故$(\mathscr{F}(X), \subseteq)$为有界偏序集。

定义 1.2.3 设A、$B \in \mathscr{F}(X)$，A与B的并$A \cup B$的隶属度函数为

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x) = \max\{A(x), B(x)\} \tag{1.2.1}$$

A与B的交$A \cap B$的隶属度函数为

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = \min\{A(x), B(x)\} \tag{1.2.2}$$

A的伪补A^c的隶属度函数为

$$A^c(x) = 1 - A(x) \tag{1.2.3}$$

上述的运算是由 Zadeh, L. A. 引入的，故亦称 Zadeh 运算，其几何表示如下：

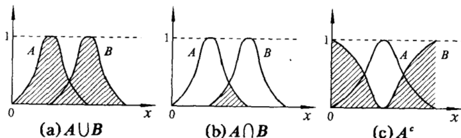


图 1.2.3

可以进一步定义 Fuzzy 集的无限交、无限并如：

$A_t \in \mathscr{F}(X) \quad (t \in T)$

$\bigcup_{t \in T} A_t$: $(\bigcup_{t \in T} A_t)(x) = \bigvee_{t \in T} A_t(x) = \sup_{t \in T} A_t(x)$

$\bigcap_{t \in T} A_t$: $(\bigcap_{t \in T} A_t)(x) = \bigwedge_{t \in T} A_t(x) = \inf_{t \in T} A_t(x)$

定理 1.2.1 $(\mathscr{F}(X), \cup, \cap, ^c)$具有以下性质：

(1) **交换律**: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) **结合律**: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) **分配律**: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4) **吸收律**: $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(5) **幂等律**: $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(6) **对合律**: $(A^c)^c=A$;

(7) **0−1 律**: $X\cap A=A, X\cup A=X, \varnothing\cap A=\varnothing, \varnothing\cup A=A$;

(8) **对偶律(De Morgan 律)**:

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

若 $B_t\in\mathscr{F}(X)\ (t\in T)$，则(3)和(8)有更一般的形式

(3′) $A\cup(\bigcap\limits_{t\in T}B_t)=\bigcap\limits_{t\in T}(A\cup B_t),\ A\cap(\bigcup\limits_{t\in T}B_t)=\bigcup\limits_{t\in T}(A\cap B_t)$;

(8′) $(\bigcup\limits_{t\in T}B_t)^c=\bigcap\limits_{t\in T}B_t^c,\ (\bigcap\limits_{t\in T}B_t)^c=\bigcup\limits_{t\in T}B_t^c$.

证明 直接验证即得. 以(8)为例,由于 $\forall x\in X$ 有

$$\begin{aligned}(A\cup B)^c(x)&=1-(A\cup B)(x)=1-\max\{A(x),\ B(x)\}\\&=\min\{1-A(x),\ 1-B(x)\}\\&=\min\{A^c(x),\ B^c(x)\}=(A^c\cap B^c)(x)\end{aligned}$$

所以 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$. 同理可证 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$. 证毕!

(3′)也称 Heyting 分配律, (8′)称无限对偶律.

必须指出的是,在 $\mathscr{F}(X)$ 中补余律不成立,即一般地

$A\cup B^c\neq X,\ A\cap A^c\neq\varnothing$

这是 Fuzzy 幂集与经典幂集最重要的不同! 例如,设 $X=[0,\ 1]$, $A(x)=x$, 则 $A^c(x)=1-x$,

$$(A\cup A^c)(x)=\begin{cases}1-x & x\leqslant\frac{1}{2}\\ x & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(A\cap A^c)(x)=\begin{cases}x & x\leqslant\frac{1}{2}\\ 1-x & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

于是 $A\cup A^c\neq X$, $A\cap A^c\neq\varnothing$.

§3 Fuzzy 集的三角模运算

为了使 Fuzzy 集运算具有较好的灵活性,必须建立 Fuzzy 集的各种不同的运算. 这些运算具有最一般的形式,即通常所说的三角模运算(也简称模运算).

定义 1.3.1 映射 T: $[0, 1]^2\to[0, 1]$ 称为三角模,如果满足条件:

(1) $T(0, 0)=0$, $T(1, 1)=1$;

(2) $a\leqslant c$ 且 $b\leqslant d\Rightarrow T(a, b)\leqslant T(c, d)$

(3) $T(a, b)=T(b, a)$

(4) $T(T(a, b), c)=T(a, T(b, c))$.

若三角模满足 $T(a, 1)=a(a\in[0, 1])$, 则称 T 为 **T 模**. 若三角模满足 $T(0, a)=a(a\in[0, 1])$, 则称之为 **S 模**.

例 1.3.1 下面的三角模为 T 模:

$$T_0'(a, b)=\begin{cases}a & b=1\\ b & a=1\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{1.3.1}$$

$$T_0(a, b)=a\wedge b \tag{1.3.2}$$

$$T_1(a, b)=a\cdot b \tag{1.3.3}$$

$$T_2(a, b)=\frac{a\cdot b}{1+(1-a)(1-b)} \tag{1.3.4}$$

$$T_\infty(a, b)=\max(0, a+b-1) \tag{1.3.5}$$

下面的模是S模:

$$S'_0(a, b)=\begin{cases} b & a=0 \\ a & b=0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \tag{1.3.6}$$

$$S_0(a, b)=a \vee b \tag{1.3.7}$$

$$S_1(a, b)=a+b-a \cdot b \tag{1.3.8}$$

$$S_2(a, b)=\frac{a+b}{1+a \cdot b} \tag{1.3.9}$$

$$S_\infty(a, b)=\min(1, a+b) \tag{1.3.10}$$

例1.3.2 对于任意 $\lambda \geqslant 0$

$$T^{(\lambda)}(a, b)=\frac{a \cdot b}{\lambda+(1-\lambda)(a+b-ab)} \tag{1.3.11}$$

$$S^{(\lambda)}(a, b)=\frac{a+b+(\lambda-2)ab}{1+(\lambda-1)ab} \tag{1.3.12}$$

分别为 T 模和 S 模. 当 $\lambda=2$ 时, $T^{(2)}=T_2$, $S^{(2)}=S_2$; 当 $\lambda=1$ 时, $T^{(1)}=T_1$, $S^{(1)}=S_1$.

例1.3.3 对于 $\forall \gamma \geqslant 1$

$$T^{(\gamma)}(a, b)=1-\min(1, [(1-a)^\gamma+(1-b)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}})$$

$$S^{(\gamma)}(a, b)=\min(1, (a^\gamma+b^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}})$$

分别为 T 模和 S 模.

定义 1.3.2 称 $a'=1-a$ ($a\in[0, 1]$)为 a 的补. 若 T 模 T 和 S 模 S 满足

$$[T(a, b)] =S(a , b) \tag{1.3.13}$$

则称 T 和 S 为**对偶三角模**或简称**对偶模**.

在例1.3.1中 T'_0 和 S'_0, T_0 和 S_0, T_1 和 S_1, T_2 和 S_2, T_∞ 和 S_∞ 都是对偶模.

显然，若 T 和 S 为对偶模，则

$$[S(a,\ b)]' = T(a',\ b') \tag{1.3.14}$$

对偶模也可以通蕴含运算形成．设$\rightarrow$: $[0,\ 1]^2 \rightarrow [0,\ 1]$, $'$: $[0,\ 1] \rightarrow [0,\ 1]$, $a' = 1 - a$, 定义

$$\vee:\ a \vee b = a' \rightarrow b$$

$$\wedge:\ a \wedge b = (a \rightarrow b')'$$

当然，$\vee$，$\wedge$ 为三角模还需要“$\rightarrow$”满足某些性质，如 $a \rightarrow b = b' \rightarrow a'$ 等，但仅要求对偶性时，勿需如此．例如

(1) 取

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1-a & a+b \leqslant 1 \\ b & a+b > 1 \end{cases}$$

则

$$a \vee b = \max\{a,\ b\} \quad a \wedge b = \min\{a,\ b\}$$

(2) 取

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leqslant b \\ b & a > b \end{cases}$$

则

$$a \vee b = \begin{cases} 1 & a+b \geqslant 1 \\ b & a+b < 1 \end{cases} \qquad a \wedge b = \begin{cases} 0 & a+b \leqslant 1 \\ b & a+b > 1 \end{cases}$$

(3) 取

$$a \rightarrow b = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{b}{a},\ 1\right\} & a > 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases}$$

则

$$a \vee b = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{b}{1-a},\ 1\right\} & a < 1 \\ 1 & a = 1 \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} \dfrac{a+b-1}{a} & a+b > 1 \\ 0 & a+b \leqslant 1 \end{cases}$$

也可以用T模 $\wedge$ 生成蕴含运算:

$$a \to b = \sup\{t | a \wedge t \leqslant b\}$$

这样的关系在Fuzzy关系方程和Fuzzy逻辑中是非常重要的。

定义 1.3.3 设 T 模 T 和 S 模 S 为对偶模,称

$$(A \cup^* B)(x) = S(A(x),\ B(x)) \tag{1.3.15}$$

定义的 $A \cup^* B$ 为 A 与 B 的**模并**,而称

$$(A \cap^* B)(x) = T(A(x),\ B(x)) \tag{1.3.16}$$

定义的 $A \cap^* B$ 为 A 与 B 的**模交**,仍称

$$A^c(x) = 1 - A(x)$$

定义的 A^c 为 A 的**伪补**.

定理1.3.1 对于模并与模交有以下性质:

(1) $A \cap^* B = B \cap^* A$, $\quad A \cup^* B = B \cup^* A$

(2) $(A \cap^* B) \cap^* C = A \cap^* (B \cap^* C)$

$\quad (A \cup^* B) \cup^* C = A \cup^* (B \cup^* C)$

(3) $A \cap^* \varnothing = \varnothing$, $A \cup^* \varnothing = A$, $A \cup^* X = X$, $A \cap^* X = A$

(4) $(A \cup^* B)^c = A^c \cap^* B^c$, $(A \cap^* B)^c = A^c \cup^* B^c$.

例如,

(1) 取 $T = T_1$, $S = S_1$, 则

$$\left.\begin{aligned} (A \cup^* B)(x) &= A(x) + B(x) - A(x)B(x) \\ (A \cap^* B)(x) &= A(x)B(x) \end{aligned}\right\} \tag{1.3.17}$$

(2) 取 $T = T_2$, $S = S_2$, 则

$$\left.\begin{aligned} (A \cup^* B)(x) &= \frac{A(x) + B(x)}{1 + A(x)B(x)} \\ (A \cap^* B)(x) &= \frac{A(x)B(x)}{1 + (1 - A(x))(1 - B(x))} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.18}$$

(3) 取 $T = T_\infty$, $S = S_\infty$, 则

$$\left.\begin{aligned} (A \cup^* B)(x) &= \min\{A(x) + B(x),\ 1\} \\ (A \cap^* B)(x) &= \max\{0,\ A(x) + B(x) - 1\} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.19}$$

(1.3.17)、(1.3.18)、(1.3.19) 都是比较常用的 Fuzzy 集运算算子。

Fuzzy 集合的模运算是经典集合运算的一般化。由于T模和S模的性质，当 Fuzzy 集合退化为经典集时，模并运算即是经典集合的并运算，模交运算即是经典集合的交运算，伪补运算即是经典集合的补运算。

§4 格及其基本性质

定义 1.4.1 称(K, $\leqslant$)为偏序集，是指“$\leqslant$”满足

(1) **自反性**: $\forall a\in K$, $a\leqslant a$;

(2) **对称性**: $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a \Rightarrow a=b$;

(3) **传递性**: $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c \Rightarrow a\leqslant c$.

若(K, $\leqslant$)为偏序集且对 $\forall a, b\in K$, $a\leqslant b$ 与 $b\leqslant a$ 二者必居其一，则称(K, $\leqslant$)为**全序集(或线性有序集)**.

例 1.4.1 设 X 为非空集，则($\mathscr{P}(X)$, $\subseteq$)为偏序集，($\mathscr{F}(X)$, $\subseteq$)也为偏序集，但它们都不是全序集。

设(K, $\leqslant$)为偏序集，若存在 $1\in K$, 使对 $\forall b\in K$, 有 $b\leqslant 1$, 则称 1 为 K 的最大元；若存在 $0\in K$ 使对 $\forall b\in K$ 有 $0\leqslant b$, 则称 0 为 K 的最小元。

由偏序关系的对称性知，若偏序集(K, $\leqslant$)有最大元(最小元)，则最大元(最小元)是唯一的。

设(K, $\leqslant$)为偏序集。若存在 $a\in K$, 使对 $\forall b\in K(b\neq a)$, $b\leqslant a$ 不成立，则称 a 为 K 的极小元；若存在 $a\in K$ 使对 $\forall b\in K\,(b\neq a)$, $a\leqslant b$ 不成立，则称 a 为 K 的极大元. 不是最小元的极小元称为原子。

显然，最小(大)元必为极小(大)元，反之未必。

例如，$X=\{a, b\}$, $K=\mathscr{P}(X)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 中按“$\subseteq$”则$\{a\}$, $\{b\}$为原子。

定义 1.4.2 设$(K, \leqslant)$为偏序集，$H \subseteq K$. 若存在 $u \in K$, 使对$\forall h \in H$有 $h \leqslant u$, 则称 u 为 H 的一个上界. 若 H 的全体上界所成之集有一个最小元,则称此最小元为 H 的上确界,记为 $\sup H$ 或 $\bigvee\limits_{h \in H} h$(或 $\vee H$). 若存在 $v \in K$ 使对$\forall h \in H$ 有 $v \leqslant h$, 则称 v 为 H 的一个下界. 若 H 的全体下界所成之集有一个最大元,则称此最大元为 H 的下确界,记为 $\inf H$ 或 $\bigwedge\limits_{h \in H} h$(或$\wedge H$). 特别当 $H=\{a, b\}$ 时,上确界记为 $a \vee b$,下确界记为 $a \wedge b$.

由偏序集的定义知,上(下)确界如果存在的话必是唯一的.

定理 1.4.1 设$(K, \leqslant)$为偏序集，则上、下确界具有以下性质:

(1) $a \wedge b \leqslant a$, $a \wedge b \leqslant b$, $a \leqslant a \vee b$, $b \leqslant a \vee b$;

(2) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$;

(3) $a \vee a = a$, $a \wedge b = a$;

(4) $a \leqslant b \Longleftrightarrow a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \vee b = b$;

(5) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;

(6) $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$.

证明 (1)、(2)、(3)显然. 现证(4).

若 $a \leqslant b$, 则 a 是 a 与 b 的下界,从而 $a \leqslant a \wedge b$. 又由 (1) 知 $a \wedge b \leqslant a$, 从而 $a = a \wedge b$. 反之,若 $a \wedge b = a$, 则由 (1) 知 $a = a \wedge b \leqslant b$. $a \leqslant b \Longleftrightarrow a \vee b = b$ 类证.

(5) 由于 $b \wedge c \leqslant b$, $b \wedge c \leqslant c$, 故

$$a \wedge (b \wedge c) \leqslant a \wedge b$$

$$a \wedge (b \wedge c) \leqslant a \wedge c \leqslant c$$

从而 $\quad a \wedge (b \wedge c) \leqslant (a \wedge b) \wedge c$

同理可证 $(a \wedge b) \wedge c \leqslant a \wedge (b \wedge c)$. 所以有

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

类似地可证 $\quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

(6) 由于 $a\leqslant a$, $a\leqslant a\vee b$, 故 $a\leqslant a\wedge(a\wedge b)\leqslant a$. 故而

$$a\wedge(a\vee b)=a$$

同理可得 $a\vee(a\wedge b)=a$.

定义 1.4.3 设 $(L,\leqslant)$ 为偏序集，且对 $\forall a, b\in L$, $a\vee b$ 和 $a\wedge b$ 都存在，则称 $(L,\leqslant)$ 为格.

定理 1.4.2 L 为格的充要条件是其上定义了两个二元运算"$\vee$"和"$\wedge$"满足:

(1) **交换律**: $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$;

(2) **结合律**: $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$

$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$;

(3) **吸收律**: $a\wedge(a\vee b)=a$, $a\vee(a\wedge b)=a$.

证明 必要性由定理 1.4.1 可得. 往证充分性.

设 $\vee$, $\wedge$ 为 L 中两种运算且满足 (1) ~ (3). 定义 L 中的二元关系"$\leqslant$"如

$$a\leqslant b \Longleftrightarrow a\wedge b=a$$

现在证明"$\leqslant$"为偏序.

① 自反性: 由吸收律

$$\left.\begin{array}{l}a\wedge(a\vee b)=a\\ a\vee(a\wedge b)=a\end{array}\right\}\Rightarrow a\wedge a=a\wedge(a\vee(a\wedge b))=a$$

和 $a\vee a=a\vee(a\wedge(a\vee b))=a$ (即幂等律成立)

故 $a\leqslant a$.

② 对称性:

$a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a\Rightarrow a\wedge b=a$ 且 $a\wedge b=b\Rightarrow a=b$.

③ $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c\Rightarrow a\wedge b=a$ 且 $b\wedge c=b\Rightarrow a\wedge c=(a\wedge b)\wedge c$ $=a\wedge(b\wedge c)=a\wedge b=a\Rightarrow a\leqslant c$.

综上所述，$(L,\leqslant)$ 为偏序集. 下面证明 $a\vee b$ 是 $\{a, b\}$ 的上确界，$a\wedge b$ 是 $\{a, b\}$ 的下确界. 由于

$$a\wedge(a\vee b)=a,\quad b\wedge(a\vee b)=b$$

从而 $a \leqslant a \vee b$, $b \leqslant a \vee b$, 故 $a \vee b$为$\{a, b\}$的一个上界. 若 c 也是$\{a, b\}$的上界，则

$$a \leqslant c,\ b \leqslant c$$

从而 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$, 即 $a \vee b \leqslant c$。 所以 $a \vee b$为$\{a, b\}$的上确界。同理可证$a \wedge b$为$\{a, b\}$的下确界. 故$(L, \leqslant)$为格.

定义 1.4.4 若格$(L, \leqslant)$具有最小元0和最大元1, 则称L为**有界格**.

有界格具有如下性质:

(1) $\forall a \in L$, $0 \leqslant a$ 且 $a \leqslant 1$;

(2) $a \vee 0 = a$, $a \wedge 0 = 0$, $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 1 = a$(0－1 律).

例 1.4.2 设X为非空集合，则$(\mathscr{P}(X), \subseteq)$和$(\mathscr{F}(X), \subseteq)$都是格.

按定理 1.4.2, 格可以有两种形式，即$(L, \leqslant)$和$(L, \vee, \wedge)$，联系它们的关系为

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \vee b = b \tag{1.4.1}$$

有一类格是由它们的原子集描述的. 设其原子集π_0, 对$\forall a \in L$, $\exists A \subseteq \pi_0$使$a = \vee A$. 此类格称为原子格，它们必为有界格且$0 = \wedge \pi_0$, $1 = \vee \pi_0$. $(\mathscr{P}(X), \cup, \cap)$为原子格，其原子集为$\{\{x\}\}_{x \in X}$.

定理 1.4.3 设$(L, \leqslant)$是格，则

(1) $b \leqslant c \Rightarrow a \wedge b \leqslant a \wedge c$, $a \vee b \leqslant a \vee c$

(2) $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c)$

(3) $a \leqslant c \Longleftrightarrow a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c \Longleftrightarrow (a \wedge b) \vee c \leqslant a \wedge (b \vee c)$.

证明 (1)由定理 1.4.1 之(4)知, $b \leqslant c \Longleftrightarrow b \wedge c = b$, 于是

$$(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = (a \wedge a) \wedge (b \wedge c) = a \wedge b$$

故 $a\wedge b\leqslant a\wedge c$。同理可证 $a\vee b\leqslant a\vee c$

(2) 由于 $a\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ 及 $b\wedge c\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ 即得 $a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$。另一式仿证。

(3) 由 $a\leqslant c\Longleftrightarrow a\vee c=c$ 及 (2) 可证。

定义 1.4.5 若 $(L,\leqslant)$ 是格且满足

(4) 分配律: $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

则称 $(L,\leqslant)$ 为**分配格**。

定理 1.4.4 若 $(L,\leqslant)$ 为分配格，则

$$a\wedge b=a\wedge c \text{ 且 } a\vee b=a\vee c\Rightarrow b=c。$$

证明 由分配律即得

$$b=b\vee(a\wedge b)=b\vee(a\wedge c)=(b\vee a)\wedge(b\vee c)$$
$$=(a\vee c)\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee c=(a\wedge c)\vee c=c$$

定义 1.4.6 设 $(L,\leqslant)$ 为格且对 $\forall H\subseteq L$, $\vee H$ 和 $\wedge H$ 都存在，则称 $(L,\leqslant)$ 为**完备格或完全格**；若 $(L,\leqslant)$ 为完备格且对 $\forall a\in L$ 及 $H\subseteq L$，有

$$a\vee(\bigwedge_{h\in H}h)=\bigwedge_{h\in H}(a\vee h) \tag{1.4.2}$$

$$a\wedge(\bigvee_{h\in H}h)=\bigvee_{h\in H}(a\wedge h) \tag{1.4.3}$$

则称 $(L,\leqslant)$ 为**无穷分配格或 Heyting 代数**；若 $(L,\leqslant)$ 为完备格，且对 $\forall\{a_{ij}\mid i\in I, j\in J_i\}$ 有

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})=\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)}) \tag{1.4.4}$$

$$\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i}a_{ij})=\bigwedge_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigvee_{i\in I}a_{if(i)}) \tag{1.4.5}$$

则称 $(L,\leqslant)$ 为**完全分配格**。

很显然，完备格必是有界格，完全分配格必是 Heyting 代数和分配格。

定义 1.4.7 设 L 是完备格, $a\in L$, $A\subseteq L$。称 A 为 a 的一个**极小族**,若 A 满足:

(1) $\sup A=a$

(2) 若 $B\subseteq L$, $\sup B=a$, 则 $\forall x\in A$ 存在 $y\in B$ 使 $x\leqslant y$.

称 A 为 a 的**极大族**,若 A 满足:

(1) $\inf A=a$

(2) 若 $B\subseteq L$, $\inf B=a$, 则对 $\forall x\in A$, 存在 $y\in B$ 使 $y\leqslant x$。

例 1.4.3 设 X 为经典集且 $X\neq\varnothing$, $L=\mathscr{P}(X)$, $E\subseteq X$ 且 $E\neq\varnothing$, 则

$$\varepsilon_1=\{\{e\}|e\in E\}$$

为 E 的极小族;而

$$\varepsilon_2=\{\{e\}^c\,|e\in E\}$$

为 E 的极大族。

例 1.4.4 设 $X=[0,1]$, 则 $\forall a\in(0,1)$, $[0,a)$ 为 a 的极小族,而 $(a,1]$ 为 a 的极大族。

定理 1.4.5 设 $(L,\leqslant)$ 为完全分配格,则 $\forall a\in L$,存在 a 的极大族和极小族。

证明 令

$$\mathscr{A}=\{A|A\subseteq L,\ \sup A=a\}$$

由于 $\sup\{a\}=a$, 故 $\mathscr{A}$ 不空,记 $\mathscr{A}=\{A_i|\ i\in J\}$, $A_i=\{a_{ij}|j\in J_i\}$,

令 $$A=\{\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)}|f\in\prod_{i\in I}J_i\}$$

则 A 为 a 的极小族。事实上,由 (1.4.4) 易证

$$\sup A=\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)})=\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij})=\bigwedge_{i\in I}\sup A_i=\bigwedge_{i\in I}a=a$$

若 $B\subseteq L$, $\sup B=a$, 则存在 $i_0\in I$ 使 $B=A_{i_0}$。今设 $x\in A$, 即对于某 $f\in\prod_{i\in I}J_i$, 有 $x=\bigwedge_{i\in I}a_{if(i)}$。取 $y=a_{i_0f(i_0)}$, 则 $y\in B$ 且 $x\leqslant y$.

于是 A 为 a 的极小族.

若令

$$\mathscr{B}=\{B|B\subseteq L,\ \inf B=a\}=\{B_i|i\in I\}$$

其中，$B_i=\{b_{ij}|j\in J_i\}$

取

$$B=\{\bigvee_{i\in I} a_{if(i)}|f\in\prod_{i\in I}J_i\}$$

类似可证 B 为 a 的极大族.

定理 1.4.6 设$(L,\ \leqslant)$为完备格，$a\in L$. 则 a 的任意多个极小族(极大族)之并仍为 a 的极小族(极大族).

证明 设 $A_i(i\in I)$是 a 的极小族，令

$$A=\bigcup_{i\in I} A_i$$

由于 $\forall\ x\in A_i\ (i\in I)$ 都有 $x\leqslant a$, 故 $\forall\ x\in A$ 都有 $x\leqslant a$, 从而 $\sup A\leqslant a$. 但是，另一方面

$$\sup A\geqslant\sup A_i=a$$

所以 $\sup A=a$. 若 $B\subseteq L$ 且 $\sup B=a$, 那么 $\forall\ x\in A$, 存在 $i_0\in I$ 使 $x\in A_{i_0}$，于是存在 $y\in B$, 使 $x\leqslant y$. 故 A 为 a 的极小族. 极大族情形类似可证. 证毕!

按定理 1.4.6, 若$(L,\ \leqslant)$为完备格，则 $\forall\ a\in L$ 必有最大极小族，记作 $\beta(a)$.

定理 1.4.7(完全分配格的构造定理) 设 L 为完备格，则 L 是完全分配格当且仅当L的每个元a都有一极小族，从而$\beta(a)$存在.

证明 必要性. 设 $a\in L$, 若 $a=0$, 则由极小集的定义可知 $\varnothing$为 a 的极小集. 现设 $a>0$. 令$\mathscr{B}=\{B\,|\,B\subseteq L,\ \sup B\geqslant a\}$, 因为 $\{a\}\in\mathscr{B}$, 故$\mathscr{B}$非空. 为简便记，将$\mathscr{B}$中各集及各集中的元素给予编号，设

$$\mathscr{B}=\{B_i\,|\,i\in I\}$$

$$\forall v\in I,\ B_i=\{a_{ij}|\,j\in J_i\}$$

由 $a>0$ 知 $\forall\ i,\ J_i\neq\emptyset$，令

$$B=\{\bigwedge_{i\in I} a_{i_{f(i)}}|f\in\prod_{i\in I}J_i\}$$

则 B 为 a 的极小族。

事实上，B 是 a 的恰当覆盖，即 $\sup B=a$，这里因为，

$$\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)})=\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{i\in J_i} a_{ij})=\inf_{i\in I}(\sup B_i)=a$$

其次，设 $C\subseteq L$ 满足 $\sup C=a$，则有 $i_0\in I$ 使 $C=B_{i_0}$。设 $x=\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)}$ 是 B 的任一元，令 $y=a_{i_0f(i_0)}$，则 $y\in B_{i_0}=C$，显然 $x\leqslant y$。所以 B 为 a 的极小族。

反之，设 L 的每个元 a 都有一极小族，从而 $\beta(a)$ 存在。

一方面，在每个完备格中，对每个固定的 $f\in\prod_{i\in I}J_i$，任取的 $i_0\in I$ 都有 $\bigvee_{i\in J_{i_0}} a_{i_0j}\leqslant\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)}$，从而

$$\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)})\leqslant\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{i\in J_i} a_{ij})$$

现设 $a=\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{J\in J_i} a_{ij})$，$b=\bigvee_{f\in\prod_{i\in I}J_i}(\bigwedge_{i\in I} a_{if(j)})$

往证 $a\leqslant b$。事实上，这时 $\forall i\in I$，$\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}\geqslant a$（即 $\forall\ i\in I$，$\{a_{ij}|\,j\in J_i\}$ 覆盖 a），又 $\beta(a)$ 为极小族，故对 $\beta(a)$ 的任一元 x，$\forall i\in I$ 存在 $j=f(i)\in J_i$ 使 $x\leqslant y=a_{if(i)}$。从而 $x\leqslant\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)}$，故 $x\leqslant b$。但是 x 是 $\beta(a)$ 中的任意元，所以 b 为 $\beta(a)$ 的上界，故 $a\leqslant b$（因为 a 为 $\beta(a)$ 的上确界）。

类似地可证

定理 1.4.8 设 L 是完备格，则 L 是完全分配格当且仅当 L 的

每个元 a 都有一极大族，从而最大极大族 $\alpha(a)$ 存在。

定义 1.4.8 设 $(K, \leqslant)$ 为偏序集，而 ^{c}: $K \to K$, 若 '^{c}' 满足

(1) $a \leqslant b \Rightarrow b^c \leqslant a^c$ (1.4.6)

则称 '^{c}' 为**逆序映射**；若 '^{c}' 满足

(2) $(a^c)^c = a$ (1.4.7)

则称 '^{c}' 为**对合映射或复原映射**；称逆序对合映射为**伪补**.

定理 1.4.9 设 '^{c}' 为格 $(L, \leqslant)$ 上的伪补，则它满足对偶律：

$$(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c,\ (a \wedge b)^c = a^c \vee b^c \quad (1.4.7)$$

证明 由于 $a \leqslant a \vee b$, $b \leqslant a \vee b$, 故 $(a \vee b)^c \leqslant a^c$ 且 $(a \vee b)^c \leqslant b^c$. 从而 $(a \vee b)^c \leqslant a^c \wedge b^c$.

同理可证 $a^c \vee b^c \leqslant (a \wedge b)^c$. 于是

$$(a^c \wedge b^c)^c \geqslant (a^c)^c \vee (b^c)^c = a \vee b$$

从而 $a^c \wedge b^c \leqslant (a \vee b)^c$. 所以 $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$.

类似可证 $(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$, 证毕.

由逆序性可知，若 $(K, \leqslant)$ 有最大元和最小元，则对伪补有

$$0^c = 1,\ 1^c = 0.$$

例 1.4.5 ^{c}: $[0, 1] \to [0, 1]$, $a \to a^c \triangleq 1 - a$, 则 '^{c}' 为 $([0, 1], \leqslant)$ 上的伪补.

定义 1.4.9 设 $(L, \leqslant)$ 是格且具有最小元 0 和最大元 1, 若存在 ^{c}: $L \to L$ 为伪补，则称 L 为**有伪补格**. 有伪补的有界分配格称为**软代数**，若软代数的伪补还满足

$$a \wedge a^c = 0 \text{ 且 } a \vee a^c = 1 \text{ (补余律)} \quad (1.4.8)$$

则称之为 **Boole 代数**. 有伪补的完全分配格称为 **Fuzzy 格**，简称 **F 格**. 完全分配的 Boole 代数称为完全 **Boole 代数**.

例 1.4.6 $(\mathscr{F}(X), \cup, \cap\ ^c)$ 为软代数，F 格 (其中 $\cup, \cap$, ^{c} 按 Zadeh, L.A. 的定义，即定义 1.2.3)，而 $(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, ^c)$ 为完全 Boole 代数.

以后我们称非 Boole 代数的软代数为**严格的软代数**或**严软代数**.

显然，由对合律易得，对伪补 ^{c}， $\forall a\in L$, a^c 是唯一的。

定理 1.4.10 L 是 Boole 代数的充要条件是存在运算"$\vee$"、"$\wedge$"和"$'$"满足

(1) **交换律**: $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$

(2) **分配律**: $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

(3) **0－1 律**: 存在 0 和 1 使 $a\vee 0=a$, $a\wedge 1=a$

(4) **补余律**: $a\wedge a'=0$, $a\vee a'=1$.

证明 必要性是显然的。往证充分性。首先证明具有性质(3)的 0 和 1 是唯一的。事实上，设 1 和 1^* 均有性质(3)，则

$$1^*\vee 1=1 \quad 1^*\vee 1=1^*$$

故 $1=1^*$. 同理有 0 的唯一性。

设对 a, 有 a' 和 a'' 使 $a\wedge a'=0$, $a\vee a'=1$ 且 $a\wedge a''=0$, $a\vee a''=1$, 则

$$a''\vee(a\wedge a')=a''\vee 0=a''$$

另一方面，由分配律知

$$a''\vee(a\wedge a')=(a''\vee a)\wedge(a''\vee a')=1\wedge(a''\vee a')=a''\vee a'$$

所以 $a''\vee a'=a''$, 即 $a'\leqslant a''$. 同理可证 $a''\leqslant a'$. 故 $a'=a''$. 所以满足(4)的 a' 的唯一的.

由于

$$b\vee 1=(b\vee 1)\wedge 1=(b\vee b')\wedge(b\vee 1)=b\vee(b'\wedge 1)=b\vee b'=1$$

从而

$$a\vee(a\wedge b)=(a\wedge 1)\vee(a\wedge b)=a\wedge(1\vee b)=a$$

同理可证 $b\wedge 0=0$, 因而 $a\wedge(a\vee b)=a$. 所以吸收律成立.

设 $x=a\vee(b\vee c)$, $y=(a\vee b)\vee c$

易证 $a\wedge x=a\wedge y$ 及 $a'\wedge x=a'\wedge y$, 从而

$$x=x\wedge(a\vee a')=(a\wedge x)\vee(a'\wedge x)=(a\wedge y)\vee(a'\wedge y)$$
$$=(a\vee a')\wedge y=y.$$

所以结合律成立．由定理 1.4.2 知，$(L, \leqslant)$ 为分配格，又由 $a \vee a'=1$ 且 a' 的唯一性知，$(a')'=a$．故“ ′”满足对合性．而当 $a \leqslant b$ 时，有 $a \vee b=b$．又

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = (a \vee b \vee a') \wedge (a \vee b \vee b')$$
$$= (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) = 1$$
$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = (a \wedge a' \wedge b') \vee (b \wedge a' \wedge b')$$
$$= (0 \wedge b') \vee (0 \wedge a') = 0$$

由 a' 的唯一性知

$$(a \vee b)' = a' \wedge b',$$

同理有 $(a \wedge b)' = a' \vee b'$．所以

$$b' = (a \vee b)' = a' \wedge b'$$

故 $b' \leqslant a'$，即“ ′”满足逆序性．证毕!

§5 L 型 Fuzzy 集合

设 X 为经典集合，L 是格，“c”为伪补，映射

$$A: X \to L$$

称为 L 型 Fuzzy 集合，记 $\mathscr{F}_L(X)=\{A \mid A: X \to L\}$.

设 $A, B \in \mathscr{F}_L(X)$，若 $A(x) \leqslant B(x) (\forall x \in X)$，则称 A 包含于 B，记为 $A \subseteq B$．易证 $(\mathscr{F}_L(X), \subseteq)$ 为格．记

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$$
$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$$
$$A^c(x) = (A(x))^c$$

则称 $A \cup B$, $A \cap B$, A^c 为 A 与 B 的并、交和 A 的补.

显然，$(\mathscr{F}_L(X), \cup, \cap, {}^c)$ 为软代数当且仅当 $(L, \vee, \wedge, {}^c)$ 为软代数；$(\mathscr{F}_L(X), \cup, \cap, {}^c)$ 为 Fuzzy 格当且仅当 $(L, \vee, \wedge, {}^c)$ 为 Fuzzy 格.

例 1.5.1 设 $L=\mathscr{P}(Y)$，则 $A: X \to \mathscr{P}(Y)$ 为 L 型 Fuzzy 集，

而$(\mathscr{F}_L(X), \cup, \cap, ^c)$为Fuzzy格。

例1.5.2 设$L=[0, 1]^2$而

$$(a, b)\leqslant(c, d)\Longleftrightarrow a\leqslant c \text{ 且 } b\leqslant d$$

再令

$$(a, b)\vee(c, d)=(a\vee c, b\vee d)$$

$$(a, b)\wedge(c, d)=(a\wedge c, b\wedge d)$$

$$(a, c)^c=(1-a, 1-b)$$

则$(L, \vee, \wedge, ^c)$为Fuzzy格，故$(\mathscr{F}_L(X), \cup, \cap, ^c)$为Fuzzy格。

若定义

$$(a, b)\leqslant(c, d)\Longleftrightarrow a\leqslant c \text{ 且 } d\leqslant b$$

而

$$(a, b)\vee(c, d)=(a\vee c, b\wedge d)$$

$$(a, b)\wedge(c, d)=(a\wedge c, b\vee d)$$

$$(a, b)^c=(b, a)$$

则$(L,\vee,\wedge, ^c)$也为Fuzzy格，故$(\mathscr{F}_L(X), \cup, \cap, ^c)$也是Fuzzy格。

例1.5.3 设$L=\{(E, F)|E\subseteq F\subseteq Y\}$($Y$为给定经典非空集)，定义

$$(E, F)\leqslant(G, H)\Longleftrightarrow E\subseteq G \text{ 且 } F\subseteq H$$

则有

$$\bigcup_{t\in T}(E_t, F_t)=(\bigcup_{t\in T}E_t, \bigcup_{t\in T}F_t)$$

$$\bigcap_{t\in T}(E_t, F_t)=(\bigcap_{t\in T}E_t, \bigcap_{t\in T}F_t)$$

再定义

$$(E, F)^c=(F^c, E^c)$$

则$(L,\cup,\cap, ^c)$为Fuzzy格，故$(\mathscr{F}_L(X), \cup, \cap, ^c)$也是Fuzzy格。

例 1.5.4 设 $L=\{(E,\ F)|E\cap F=\varnothing,\ E,\ F\subseteq Y\}$($Y$ 为给定经典非空集),定义

$$(E,\ F)\leqslant(G,\ H)\Longleftrightarrow E\subseteq G \text{ 且 } H\subseteq F$$

则导出 $\oplus$, $\odot$ 为

$$\oplus(E_t,\ F_t)=(\bigcup_{t\in T}E_t,\ \bigcap_{t\in T}F_t)$$

$$\odot(E_t,\ F_t)=(\bigcap_{t\in T}E_t,\ \bigcup_{t\in T}F_t)$$

再定义

$$(E,\ F)^c=(F,\ E)$$

则 $(L,\oplus,\odot,\ ^c)$ 为 Fuzzy 格,故 $(\mathscr{F}_L(X),\cup,\cap,\ ^c)$ 为 Fuzzy 格.

设 $A\in\mathscr{F}_L(X)$ 为 L 型 Fuzzy 集,$\alpha\in L$, 令

$$A_\alpha=\{x|A(x)\geqslant\alpha\}$$

$$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\{x|A(x)>\alpha\}$$

称 A_α 为 A 的 α-截集,$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$ 为 A 的 α-强截集. 对此我们有

定理 1.5.1 设 L 为完备格,$A_t\in\mathscr{F}_L(X)$, $(t\in T)$, α, $\beta\in L$, 则

(1) $\alpha\leqslant\beta\Rightarrow A_{\underset{\cdot}{\beta}}\subseteq A_\beta\subseteq A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq A_\alpha$

(2) $(\bigcup_{t\in T}A_t)_\alpha\supseteq\bigcup_{t\in T}(A_t)_\alpha$

(3) $(\bigcup_{t\in T}A_t)_{\underset{\cdot}{\alpha}}\supseteq\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\alpha}}$

(4) $(\bigcap_{t\in T}A_t)_\alpha=\bigcap_{t\in T}(A_t)_\alpha$

(5) $(\bigcap_{t\in T}A_t)_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq\bigcap_{t\in T}(A_t)_{\underset{\cdot}{\alpha}}$

且当 t 为有限集时"$\subseteq$"或"$\supseteq$"全部变为等号.

定理 1.5.2 设 L 为完备格,$A\in\mathscr{F}_L(X)$, 则

(1) $A(x)=\bigvee_{\alpha\in L}(\alpha\wedge A_\alpha(x))$

(2) $A(x)\geqslant\bigvee_{\alpha\in L}(\alpha\wedge A_{\underset{\cdot}{\alpha}}(x))$

其中

$$A_\alpha(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } A(x)\geqslant\alpha\\ 0 & \text{当 } A(x)\ngeqslant\alpha\end{cases}$$

$A_{\underset{\cdot}{\alpha}}(x)$的定义类似.

参考文献

1 Dubious, D. and Prade, H.. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application. New York, 1980

2 Goguen, J. A.. L-fuzzy Sets. J. math Anal. Appl., 1967; 18: 145—174

3 张文修等．模糊数学引论．西安：西安交通大学出版社，1991

4 汪培庄．模糊集合论及其应用．上海：上海科学技术出版社，1984

5 罗承忠．模糊集引论．北京：北京师范大学出版社，1989

6 刘文奇．不确定性数学大纲．昆明：云南大学出版社，1995

7 Birkhoff, G.. Lattice Theory. 3rd, AMS. Colloq. Pull. Providence, R. I., 1967

8 Gierz, G. *et al.* A Compendium of Continuous Lattice. Springer-Verlag, 1980

9 Johnstone, P. T.. Stone Space. London: Cambridge University Press, 1982

10 Hutton, B.. Uniformities on Fuzzy Topological Space. J. math. Anal. Appl., 1977; 58: 559—571

11 王国俊．φ-极小集理论及其应用．科学通报，1986; 31: 1049—1053

12 王国俊，杨忠强．极大族理论及其应用．工程数学学报，1984; 1: 64—69

13 张德学，刘应明．分配格的 L-fuzzy 拓扑表示与 L-Fuzzy 理想．数学年刊，1994; 15(1): 59—68

14 王国俊．论 Fuzzy 格之构造．数学学报，1986; 29: 539—543

15 胡长流等．格论基础．开封：河南大学出版社，1990

16 中山　正著．格论．董克诚译．上海：上海科学技术出版社，1964

17 刘文奇．完全 Boole 代数的配对格．昆明理工大学学报，1997; 22(4): 102—105

18 刘文奇．*YN*(*X*) 上的拓扑结构．昆明理工大学学报，1997; 22(6): 12—15

19 刘文奇．从 Boole 代数到一般软代数的对称扩张．兰州大学学报(自然科学版)，1996; 32(模糊专集): 124—128

第二章　集合套表现理论

用经典集来表现 Fuzzy 集是一个人们历来关注的问题．最早的表现方法是截集方法(文献〔1〕)，即用截集系构造Fuzzy集．之后，〔2〕、〔3〕等文献中提出了集合套理论，系统地研究了Fuzzy集论的分解定理和表现定理，为 Fuzzy 数学提供了可靠基础并派生出一大类 Fuzzy 数学领域的研究方法．鉴于实际表现中的可操作性，自然引出另一类 Fuzzy 集的表现问题，即 Fuzzy 集的近似表现问题．文献〔4〕最先提出用经典集对近似表现 Fuzzy 集的方法，文献〔5〕、〔6〕、〔7〕、〔8〕进行了深化．最近，文献〔10〕提出了集合环方法，全面综合了以往表现理论的成果．本章的目的是综述迄今为止集合套表现理论的所有成果，使之系统化．

本章中所涉及的 Fuzzy 集的并、交、补等系指 Zadeh意义下的运算，此后不作一一申明．

§1　分解定理与表现定理

一、λ-截集

定义2.1.1　设 $A\in\mathscr{F}(X)$，对任意 $\lambda\in[0,1]$，记 $A_\lambda\triangleq\{x\mid x\in X, A(x)\geqslant\lambda\}$，$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\triangleq\{x\mid x\in X, A(x)>\lambda\}$，称 A_λ 为 A 的 **λ-截集**，$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为 A 的 **λ-强截集**．

定理 2.1.1　截集具有下列性质：

(1)　$(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$，$(A\cap B)_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda$

(2)　$(A\cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，$(A\cap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$

(3) $(A^c)_\lambda = (A_{1\dot{-}\lambda})^c$, $(A^c)_{\dot{\lambda}} = (A_{1-\lambda})^c$

(4) $A_0 = X$, $A_1 = \varnothing$

证明 (1) $x \in (A \cup B)_\lambda \Longleftrightarrow (A \cup B)(x) \geqslant \lambda \Longleftrightarrow A(x) \vee B(x) \geqslant \lambda \Longleftrightarrow A(x) \geqslant \lambda$ 或 $B(x) \geqslant \lambda \Longleftrightarrow x \in A_\lambda \cup B_\lambda$。

$x \in (A \cap B)_\lambda \Longleftrightarrow (A \cap B)(x) \geqslant \lambda \Longleftrightarrow A(x) \wedge B(x) \geqslant \lambda \Longleftrightarrow A(x) \geqslant \lambda$ 且 $B(x) \geqslant \lambda \Longleftrightarrow x \in A_\lambda$ 且 $x \in B_\lambda \Longleftrightarrow x \in A_\lambda \cap B_\lambda$.

(2) 仿(1)证。

(3) $x \in (A^c)_\lambda \Longleftrightarrow A^c(x) = 1 - A(x) \geqslant \lambda \Longleftrightarrow A(x) \leqslant 1 - \lambda \Longleftrightarrow A(x) \not> 1 - \lambda \Longleftrightarrow x \notin A_{1\dot{-}\lambda} \Longleftrightarrow x \in (A_{1\dot{-}\lambda})^c$.
另式仿证.

定义 2.1.2 设 $A \in \mathscr{F}(x)$, $\lambda \in [0, 1]$, 定义 $\lambda A \in \mathscr{F}(X)$ 如

$$(\lambda A)(x) = \lambda \wedge A(x) \tag{2.1.1}$$

定理 2.1.2 (分解定理Ⅰ) 设 $A \in \mathscr{F}(X)$,则有

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda A_\lambda \tag{2.1.2}$$

证明 $\left(\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda\right)(x) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge A_\lambda(x)) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | A_\lambda(x) = 1\}$

$= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda | A(x) \geqslant \lambda\} = A(x)$, 所以 $A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda$。

定理 2.1.3(分解定理 II) 设 $A \in \mathscr{F}(X)$, 则有

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda A_{\dot{\lambda}} \tag{2.1.3}$$

证明 仿定理 2.1.2 证。

由定理 2.1.2 及定理 2.1.3 立即得

定理 2.1.4(分解定理 III) 设 $A \in \mathscr{F}(X)$, 且 H: $[0, 1] \to \mathscr{P}(X)$, $\lambda \mapsto H(\lambda)$ 满足 $\forall \lambda \in [0, 1]$, $A_{\dot{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$, 则有

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda H(\lambda) \tag{2.1.4}$$

二、表现定理

定义 2.1.3 设 H: $[0,\ 1] \to \mathscr{P}(X)$，$\lambda \mapsto H(\lambda)$ 满足：

$$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2) \tag{2.1.5}$$

则称 H 为 X 上的一个**集合套**，全体集合套组成的集合记作 $\mathscr{H}(X)$。

定义 2.1.4 在 $\mathscr{H}(X)$ 中规定运算 $\cup, \cap, {}^c$ 如下（无限运算类同）：

$$\left.\begin{array}{l} H_1 \cup H_2\text{: } (H_1 \cup H_2)(\lambda) \triangleq H_1(\lambda) \cup H_2(\lambda) \\ H_1 \cap H_2\text{: } (H_1 \cap H_2)(\lambda) \triangleq H_1(\lambda) \cap H_2(\lambda) \\ H^c\text{: } H^c(\lambda) \triangleq (H(1-\lambda))^c \end{array}\right\} . \tag{2.1.6}$$

定理 2.1.5（表现定理 I） 设 T: $\mathscr{H}(X) \to \mathscr{F}(X)$，$H \to T(H) \triangleq \bigcup\limits_{\lambda \in [0,\ 1]} \lambda H(\lambda)$，那么 T 是 $(\mathscr{H}(X), \cup, \cap, {}^c)$ 到 $(\mathscr{F}(X), \cup, \cap, {}^c)$ 上的**同态满射**，且对 $\forall \lambda \in [0,\ 1]$

$$T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq T(H)_\lambda \tag{2.1.7}$$

$$T(H)_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha) \tag{2.1.8}$$

$$T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcap_{\alpha > \lambda} H(\alpha) \tag{2.1.9}$$

证明 (1) $\forall H \in \mathscr{H}(X)$，$T(H) = \bigcup\limits_{\lambda \in [0,\ 1]} \lambda H(\lambda) \in \mathscr{H}(X)$ 唯一确定，所以 T 是 $\mathscr{H}(X)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 是映射．

(2) $\forall A \in \mathscr{F}(X)$，令 $H(\lambda) = A_\lambda$ $(\lambda \in [0,\ 1])$，得 $H \in \mathscr{H}(X)$，使 $T(H) = \bigcup\limits_{\lambda \in [0,\ 1]} \lambda A_\lambda = A$，所以 T 是满射．

(3) $x \in H(\lambda) \Rightarrow H(\lambda)(x) = 1 \Rightarrow T(H)(x) = \bigvee\limits_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge H(\alpha))(x) \geqslant \lambda \wedge H(\lambda)(x) = \lambda \Rightarrow x \in T(H)_\lambda$，即 $H(\lambda) \subseteq T(H)_\lambda$．

$x \notin H(\lambda) \Rightarrow H(\lambda)(x) = 0 \Rightarrow \forall \alpha \geqslant \lambda$，$H(\lambda)(x) = 0 \Rightarrow T(\lambda)(x) = \bigvee\limits_{\alpha \in [0,\ 1]} (\alpha \wedge H(\alpha))(x) = \bigvee\limits_{\alpha \in [0,\ \lambda]} (\alpha \wedge H(\alpha)(x)) \leqslant \bigvee\limits_{\alpha \in [0,\ \lambda]} \alpha = \lambda \Rightarrow x \notin T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$

即 $T(H)_{\lambda} \subseteq H(\lambda)$.

所以 $T(H)_{\lambda} \subseteq H_{\lambda} \subseteq T(H)_{\lambda}$.

(4) $\forall \alpha<\lambda,\ H(\alpha) \supseteq T(H)_{\alpha} \supseteq T(H)_{\lambda} \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \supseteq T(H)_{\lambda}$

$(\lambda \neq 0)$, 又 $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} T(H)_{\alpha} = T(H)_{(\bigvee\limits_{\alpha<\lambda} \alpha)} = T(H)_{\lambda}\ (\lambda \neq 0)$,

故 $Y(H)_{\lambda} = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha)\ (\lambda \neq 0)$.

同理 $T(H)_{\lambda} = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha)\ (\lambda \neq 1)$.

(5) $\forall \lambda \in (0, 1]$,

$$T(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} H_{\gamma})_{\lambda} = \bigcap_{\alpha<\lambda} (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} H_{\gamma})(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda} (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} H_{\gamma}(\alpha))$$

$$= \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (\bigcap_{\alpha<\lambda} H_{\gamma}(\alpha)) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} T(H_{\gamma})_{\lambda} = (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} T(H_{\gamma}))_{\lambda}$$

由分解定理 I, 有 $T(\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} H_{\gamma}) = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} T(H_{\gamma})$.

(6) $\forall \lambda \in [0, 1)$, $T(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} H_{\gamma})_{\lambda} = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} (\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} H_{\gamma})(\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} (\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} H_{\gamma}(\alpha))$

$= \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} (\bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H_{\gamma}(\alpha)) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} T(H_{\gamma})_{\lambda} = (\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} T(H_{\gamma}))_{\lambda}$

由分解定理 II, 有 $T(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} H_{\gamma}) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} T(H_{\gamma})$.

(7) $\forall \lambda \in (0, 1]$,

$$T(H^{c})_{\lambda} = \bigcap_{\alpha<\lambda} H^{c}(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda} (H(1-\alpha))^{c} = (\bigcup_{1-\alpha>1-\lambda} H(1-\alpha))^{c}$$

$=(T(H)_{1-\lambda})^{c} = ((T(H)^{c})_{\lambda}$

由分解定理 I, 有 $T(H^{c}) = (T(H))^{c}$.

(5) ~ (7) 说明 T 是同态满射.

定义 2.1.5 若集合套 $F \in \mathscr{H}(X)$ 满足:

$$F(0)=X,\quad F(\bigvee_{\gamma\in\Gamma} \gamma_{\lambda}) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F(\lambda_{\gamma})$$

则称 F 为 X 上的一个集轮. 全体集轮组成的集合记作 $\Phi(X)$.

若集合套 $\underset{\cdot}{F}\in\mathscr{H}(x)$ 满足 $\underset{\cdot}{F}(1)=\varnothing$, $\underset{\cdot}{F}(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma}\lambda_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\underset{\cdot}{F}(\lambda_\gamma)$ 则称 $\underset{\cdot}{F}$ 为 X 上的一个**强集轮**，全体强集轮组成的集合记作 $\underset{\cdot}{\Phi}(X)$。

显然，$\forall A\in\mathscr{F}(X)$，令 $F(\lambda)=A_\lambda$, $\underset{\cdot}{F}(\lambda)=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 则 F 为集轮，$\underset{\cdot}{F}$ 为强集轮。又 $\forall H\in\mathscr{H}(X)$，令

$$F_H(0)=X,\ F_H(\lambda)=T(H)_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)(\lambda\in(0,\ 1])$$

$$\underset{\cdot}{F}_H(1)=\varnothing,\ \underset{\cdot}{F}_H(\lambda)=T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)(\lambda\in[0,\ 1))$$

则 F_H 为集轮，$\underset{\cdot}{F}_H$ 为强集轮。

换言之，每一个集合套唯一地确定一个集轮和一个强集轮。

由分解定理Ⅰ、Ⅱ知，若 $T(H_1)=T(H_2)$，则 $F_{H_1}=F_{H_2}$，并且 $T(H_1)=T(H_2)=T(F_1)$。

若在 $\mathscr{H}(X)$ 中定义二元关系"～"：

$$H_1\sim H_2 \Longleftrightarrow T(H_1)=T(H_2) \tag{2.1.10}$$

则易知"～"满足：

(1) **自反性**：$H\sim H$;

(2) **对称性**：$H_1\sim H_2\Rightarrow H_2\sim H_1$;

(3) **传递性**：$H_1\sim H_2$ 且 $H_2\sim H_3\Rightarrow H_1\sim H_3$.

因此"～"为等价关系.

作商集 $\mathscr{F}'(X)=\mathscr{H}(X)/\sim\ =\{\{H\}\mid H\in\mathscr{H}(X)\}$，其中 $\{H\}=\{H'\mid H'\in\mathscr{H}(X),\ H'\sim H\}$.

令 T': $\mathscr{F}'(X)\to\mathscr{F}(X)$，$\{H\}\to T'(\{H\})=T(H)$ 则 T' 为 $\mathscr{F}'(X)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 的一一映射.

在 $\mathscr{F}'(X)$ 中定义 $\cup$、$\cap$、^{c} 如下：

$$\left.\begin{aligned}&\{H_1\}\cup\{H_2\}\triangleq\{H_1\cup H_2\}\\&\{H_1\}\cap\{H_2\}\triangleq\{H_1\cap H_2\}\\&\{H\}^c\triangleq\{H^c\}\end{aligned}\right\} \tag{2.1.11}$$

这样的运算与代表选择无关.事实上，若 $H_1'\sim H_1$, $H_2'\sim H_2$, $H'\sim H$. 则

$$T(H_1')=T(H_1),\ T(H_2')=T(H_2),\ T(H')=T(H).$$

由 T 的同态性知

$$T(H_1'\cup H_2')=T(H_1')\cup T(H_2')=T(H_1)\cup T(H_2)=T(H_1\cup H_2)$$

$$T(H_1'\cap H_2')=T(H_1')\cap T(H_2')=T(H_1)\cap T(H_2)=T(H_1\cap H_2)$$

$$T((H')^c)=(T(H'))^c=(T(H))^c=T(H^c)$$

从而 $H_1'\cup H_2' \sim H_1\cup H_2$, $H_1'\cap H_2' \sim H_1\cap H_2$, $(H')^c \sim H^c$.

由于 T 的同态性及 $T'(\{H\})=T(H)$, 可得知 T' 为 $(\mathscr{F}'(X), \cup, \cap, {}^c)$ 到 $(\mathscr{F}(X), \cup, \cap, {}^c)$ 的同构映射. 为此, 我们可以认为 Fuzzy 集是集合套的等价类$\{H\}$, 而类中任一集合套 H 都可以作为代表来表示 Fuzzy 集. 易知, $(\mathscr{H}(X), \cup, \cap, {}^c)$ 的子代数系统$(\Phi(X), \cup, \cap, {}^c)$ 及$(\Phi(X), \cup, \cap, {}^c)$ 也与 $(\mathscr{F}(X), \cup, \cap, {}^c)$ 是同构的.

§2 可列集合套

定义 2.2.1 $Q=\{\alpha_k \mid k=1, 2, \cdots\}\subseteq(0, 1)$ 且在 $(0, 1)$ 稠密, $1-\alpha_k\in Q$, 称 Q 为 $(0, 1)$ 的**可列稠密子集**.

引理 2.2.1 设 Q 是 $(0, 1)$ 的可列稠密子集, 则

(1) $\forall \lambda_1, \lambda_2\in(0, 1)$, $\lambda_1<\lambda_2$, $\exists \alpha\in Q$ 使 $\lambda_1<\alpha<\lambda_2$;

(2) $\forall \lambda\in(0, 1)$, $\lambda=\vee\{\alpha \mid \alpha<\lambda, \lambda\in Q)=\wedge\{\alpha \mid \alpha>\lambda, \alpha\in Q\}$

证明 (1) 由稠密定义立即可得.

(2) $\wedge\{\alpha \mid \alpha>\lambda, \alpha\in Q\}\geqslant\lambda$ 中若等号不成立, 则 $\exists\gamma\in Q$ 使 $\wedge\{\alpha \mid \alpha>\lambda, \alpha\in Q\}>\gamma>\lambda$, 矛盾. 所以等式成立.

同理可证 $\vee\{\alpha \mid \alpha<\lambda, \alpha\in Q\}=\lambda$.

显然, $Q=\vee\{\alpha \mid \alpha\in(0, 1)$ 且 α 有有限位小数$\}$ 是 $(0, 1)$的可列稠密子集.

定义 2.2.2 设 Q 为$(0, 1)$的可列稠密子集, $H: Q\to\mathscr{P}(X)$, $\alpha\to H(\alpha)$ 满足:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_1) \supseteq H(\alpha_2) \tag{2.2.1}$$

则称 H 为 X 上的一个**可列集合套**，X 上的全体可列集合套记为 $\mathscr{H}_Q(X)$.

定理 2.2.1(可列分解定理) 设 Q 为 $(0,\ 1)$ 的可列稠密子集，$A\in\mathscr{F}(X)$，$H\in\mathscr{H}_Q(X)$ 且满足 $\forall\,\alpha\in Q,\ A_\alpha\subseteq H(\alpha)\subseteq A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，则

(1) $A=\bigcup\limits_{\alpha\in Q}\alpha A_\alpha$;

(2) $A=\bigcup\limits_{\alpha\in Q}\alpha A_{\underset{\cdot}{\alpha}}$;

(3) $A=\bigcup\limits_{\alpha\in Q}\alpha H(\alpha)$;

(4) $\alpha_1,\ \alpha_2\in Q,\ \alpha_1<\alpha_2\Rightarrow H(\alpha_1)\supseteq H(\alpha_2)$;

(5) $A_\lambda=\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}H(\alpha),\ \lambda\in(0,\ 1],\ \alpha\in Q$;

$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcup\limits_{\alpha>\lambda}H(\alpha),\ \lambda\in[0,\ 1),\ \alpha\in Q$.

证明 (1) 由定理2.1.2知，$A=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$，显然 $\bigcup\limits_{\alpha\in Q}\alpha A_\alpha\subseteq\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$.

又 $\forall\,\lambda\in(0,\ 1)$，$\exists\,\alpha_1,\ \alpha_2\in Q$ 使 $\alpha_1<\lambda<\alpha_2$，而 $A_{\alpha_1}\supseteq A_\lambda\supseteq A_{\alpha_2}$，故 $\alpha_1A_{\alpha_1}\subseteq\lambda A_\lambda\subseteq\alpha_2A_{\alpha_2}$. 所以 $\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in Q}\alpha A_\alpha$. 其余仿(1)即证.

定义 2.2.3 在 $\mathscr{H}_Q(X)$ 中定义 $\cup,\ \cap,\ ^c$ 如:

$$\left.\begin{aligned}&H_1\cup H_2:\ (H_1\cup H_2)=H_1(\alpha)\cup H_2(\alpha)\\&H_1\cap H_2:\ (H_1\cap H_2)(\alpha)=H_1(\alpha)\cap H_2(\alpha)\\&H^c:\ H^c(\alpha)=(H(1-\alpha))^c\end{aligned}\right\}\tag{2.2.2}$$

其中 $\alpha\in Q$.

利用引理 2.2.1 可以证明:

定理 2.2.2(可列表现定理) 设 Q 为 $(0,\ 1)$ 的可列稠密子集，T: $\mathscr{H}_Q(X)\to\mathscr{F}(X)$，$H\to T(H)=\bigcup\limits_{\alpha\in Q}\alpha H(\alpha)$，则

(1) T是$(\mathscr{H}_Q(X),\cup,\cap,{}^c)$到$(\mathscr{F}(X),\cup,\cap,{}^c)$的同态满射;

(2) $\forall\alpha\in Q$, $T(H)_{\underline{\alpha}}\subseteq H(\alpha)\subseteq T(H)_{\alpha}$;

(3) $T(H)_{\lambda}=\bigcap\limits_{\lambda<\lambda} H(\alpha)$, $\lambda\in(0,\ 1]$, $\alpha\in Q$;

(4) $T(H)_{\underline{\lambda}}=\bigcup\limits_{\lambda<\lambda} H(\alpha)$, $\lambda\in[0,\ 1)$, $\alpha\in Q$.

上定理说明可以用可列集合套刻划 Fuzzy 集。

设 $A\in\mathscr{F}(X)$, $Q=\{\alpha|\ \alpha$ 为有限位数, $\alpha\in(0,\ 1)\}$, 根据 $\{A_{0.k5}|\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ 9\}$ 构造可列集合套 $H_A=\{H_A(\alpha)|\alpha\in Q\}$ 如:

$$H_A(\alpha)=A_{0.k5}\quad (0.k<\alpha\leqslant 0.k+0.1)\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 9)$$

称 $\hat{A}(1)=\bigcup\limits_{\alpha\in Q}\alpha H(\alpha)$ 为 A 的 1 位近似 Fuzzy 集. 相似地,可以构造 A 的 l 位近似 Fuzzy 集 $\hat{A}(l)$。这里,计算可得

$$\begin{aligned}\hat{A}(1)(x)&=\vee\{\alpha|x\in H(\alpha)\}=\vee\{0.k+0.1|x\in A_{0.k5}\}\\&=\begin{cases}0 & x\notin A_{0.k5}\\ 0.k+0.1 & x\in A_{0.k5}-A_{0.k5+0.1}\end{cases}\\&=\begin{cases}0 & A(x)<0.05\\ 0.k+0.1 & 0.k5\leqslant A(x)<0.k5+0.1\end{cases}\end{aligned}$$

$\hat{A}(1)(x)$ 即将 $A(x)$ 按四舍五入取 1 位小数.

§3 是非集对

本节介绍集对及其运算.

定义 2.3.1 设 X 为非空集合,称 $YN(X)=\{(A',\ A'')|A'\cap A''=\varnothing,\ A'\subseteq X,\ A''\subseteq X\}$ 为 X 上的是非空间,其元素为 X 的是非集对. 若 $(A',\ A'')\in YN(X)$, 则称 A' 为 $(A',\ A'')$ 的是集, A'' 为 $(A',\ A'')$ 的非集,而 $(A'\cup A'')^c$ 为 $(A',\ A'')$ 的不分明部分. 记 $A\triangleq(A',\ A'')$、$B\triangleq(B',\ B'')$ 等等.

定义 2.3.2 设 $(A', A'')\in YN(X)$，若 $A'\cup A''=X$，则称 (A', A'')为**纯是非集对**．全体纯是非集对所成的集合记为 $PYN(X)$，称 $PYN(X)$ 为 X 上的**纯是非空间**．

由于 $(A', A'')\in PYN(X)$ 时，$A'\cup A''=X$，是集和非集满足 $A'=(A'')^c$．因此，映射 $T: PYN(X)\to\mathscr{P}(X)$ 为单满射．此处 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 的幂集．

定义 2.3.3 在 $YN(X)$ 上定义运算 $\oplus$，$\odot$ 和 ^{c}：$\forall A=(A', A'')$，$B=(A', A'')\in YN(X)$

$$\left.\begin{aligned} A\oplus B&=(A'\cup B', A''\cap B'') \\ A\odot B&=(A'\cap B', A''\cup B'') \\ A^c&=(A'', A') \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1)$$

称"$\oplus$"、"$\odot$"、"^{c}"依次为和运算、积运算和反运算．

定理 2.3.1 $(YN(X), \oplus, \odot, ^c)$ 为软代数系统，但不是 Boole 代数系统．

证明 由经典集的运算律易推出

(1) 交换律：$A\oplus B=B\oplus A$, $A\odot B=B\odot A$;

(2) 结合律：$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$, $A\odot(B\odot C)=(A\odot B)\odot C$;

(3) 分配律：$A\oplus(B\odot C)=(A\oplus B)\odot(A\oplus C)$, $A\odot(B\oplus C)$
$=(A\odot B)\oplus(A\odot C)$;

(4) 幂等律：$A\oplus A=A$, $A\odot A=A$;

(5) 吸收律：$A\oplus(A\odot B)=A$, $A\odot(A\oplus B)=A$;

(6) 对偶律：$(A\oplus B)^c=A^c\odot B^c$, $(A\odot B)^c=A^c\oplus B^c$;

(7) 复原律：$(A^c)^c=A$;

(8) 0－1 律：存在最大元$(\varnothing, X)$和最小元$(\varnothing, X)$，使对 $\forall A$ 有 $A\odot(X,\varnothing)=A$，$A\oplus(X,\varnothing)=(X,\varnothing)$，$A\odot(\varnothing,X)=(\varnothing,X)$，$A\oplus(\varnothing,X)=A$．因此$(YN(X), \oplus, \odot, ^c)$为软代数系统．但由于一般 $A\oplus A^c=(X,\varnothing)$不成立，即补余律未得到满足，故$(YN(X),\oplus,\odot,^c)$不是 Boole 代数系统．

定理 2.3.2 映射 $T:(PYN(X),\oplus,\odot,{}^c)\to(\mathscr{P}(X),\cap,\cup,{}^c)$, $(A',A'')\to A'$ 是同构映射．其中后一个"c"是通常的补运算．

证明 $\forall A=(A',A''),B=(B',B'')\in PYN(X)$, 有

$$T(A\oplus B)=T(A'\cup B',A''\cap B'')=A'\cup B'=T(A)\cup T(B)$$

$$T(A\odot B)=T(A'\cap B',A''\cup B'')=A'\cap B'=T(A)\cap T(B)$$

$$T(A^c)=T(A'',A')=A''=(A')^c=(T(A))^c$$

因此 T 为同态．又 T 为单满射，故 T 为同构．

定理 2.3.2说明，$(PYN(X),\oplus,\odot,{}^c)$ 为 Boole 代数系统，并且可将其视为普通幂集系统 $(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,{}^c)$. 从而表明 $(YN(X),\oplus,\odot,{}^c)$ 确实是 $(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,{}^c)$ 的一个扩张．

当然我们可以将$\oplus$,$\odot$搬到无限的情形，即，$\mathscr{A}$为指标集:

$$\bigoplus_{\alpha\in\mathscr{A}}(A'_\alpha,A''_\alpha)=(\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A'_\alpha,\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A''_\alpha)$$

$$\bigodot_{\alpha\in\mathscr{A}}(A'_\alpha,A''_\alpha)=(\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A'_\alpha,\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A''_\alpha)$$

且易得

$$\left.\begin{aligned}\left[\bigoplus_{\alpha\in\mathscr{A}}(A'_\alpha,A''_\alpha)\right]^c&=\bigodot_{\alpha\in\mathscr{A}}(A'_\alpha,A''_\alpha)^c\\\left[\bigodot_{\alpha\in\mathscr{A}}(A'_\alpha,A''_\alpha)\right]^c&=\bigoplus_{\alpha\in\mathscr{A}}(A'_\alpha,A''_\alpha)^c\end{aligned}\right\}\tag{2.3.2}$$

还可以定义卡氏积

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{A}}(A'_\alpha,A''_\alpha)\triangleq(\prod_{\alpha\in\mathscr{A}}A'_\alpha,\prod_{\alpha\in\mathscr{A}}A''_\alpha)\tag{2.3.3}$$

定义 2.3.4 (A',A'') 与 (B',B'') 相等是指 $A'=B'$ 且 $A''=B''$.

定义 2.3.5 在 $YN(X)$ 上定义二元关系"$\prec$"为:

$(A',A'')\prec(B',B'')$ 当且仅当 $A'\subseteq B'$ 且 $A''\supseteq B''$.

称"$\prec$"为包含关系．

定理 2.3.3 $(YN(X),\prec)$ 是偏序集．

证明 (1) 自反性显然成立，即 $\forall A\in YN(X)$, $A\prec A$。

(2) 反对称性．设 $(A',A'')\prec(B',B'')$ 且 $(B',B'')\prec(A',A'')$,

则 $A' \subseteq B'$ 且 $A'' \supseteq B''$ 且 $B' \subseteq A'$ 且 $B'' \supseteq A''$. 从而 $A' = B'$ 且 $A'' = B''$, 即 $(A', A'') = (B', B'')$。

(3)传递性。设 $(A', A'') \prec (B', B'')$ 且 $(B', B'') \prec (C', C'')$,则有

$$A' \subseteq B' \text{ 且 } B' \subseteq C' \Rightarrow A' \subseteq C',\ A'' \supseteq B'' \text{ 且 } B'' \supseteq C'' \Rightarrow A'' \supseteq C''.$$

所以 $(A', A'') \prec (C', C'')$。

定理 2.3.4 $(YN(X), \prec)$ 有最大元 $(X, \varnothing)$ 和最小元 $(\varnothing, X)$。

证明: 显然成立。

定义 2.3.6 若 $(A', A'') \prec (B', B'')$,则称 (A', A'') 为 (B', B'') 的**子是非集对**.

显然, $(X, \varnothing)$ 的所有子是非集对所成集合即为 $YN(X)$。在 $YN(X)$ 中还有一个特殊元素是 $(\varnothing, \varnothing)$,我们称之为**非认识元**.

§4 Fuzzy 结构及其扩张

我们引入集对的目的是用它近似地表示 Fuzzy 集. 因此,如何用集对来表达 Fuzzy 集这在理论上是重要的.

一、模糊结构与实例

1992 年,刘文奇在论域 X 上引入了 Fuzzy 结构[4~6].

定义 2.4.1 设 X 为非空经典集,若映射 $\mu: YN(X) \times X \to [0, 1]$ 满足:

(1) 对 $\forall A = (A', A'')$, 若 $x \in A'$ 则 $\mu(A, x) = 1$; 若 $x \in A''$ 则 $\mu(A, x) = 0$;

(2) 若 $A \prec B$, 则对 $\forall x \in X$ 有 $\mu(A, x) \leqslant \mu(B, x)$.

则称 μ 为 X 上的 **Fuzzy 结构**. 由 μ 诱导出的函数族 $\mathscr{F}_\mu(X) = \{\mu_A(x) \triangleq \mu(A, x) | A \in YN(X)\}$ 称为 X 的关于 μ 的**幂集**,简称为 **μ-幂集**.

$\mathscr{F}_\mu(X)$ 的元素称为 X 的 μ-Fuzzy 子集,在不混淆的情况

下，简称为Fuzzy子集或Fuzzy集．仍用 A、B、…… 等等表示之．

规定 $\forall x\in X$, $\mu((\varnothing,\varnothing),x)=0.5$.

例 2.4.1 设 X 为非空经典集，定义 μ 如下：

$$\mu(A,x)=\begin{cases}1 & x\in A' \\ 0.5 & x\in (A'\cup A'')^C \\ 0 & x\in A''\end{cases}$$

易证 μ 为 X 上的 Fuzzy 结构，我们称之为典型 Fuzzy 结构．

例 2.4.2 设 (X,ρ) 为距离空间，$M\subseteq X$, $L=\max\limits_{x,y\in X}\rho(x,y)$ 为有限数，点到集合的距离定义为

$$d(x,M)=\begin{cases}\inf\limits_{y\in M}\rho(x,y) & 当\ M\neq\varnothing \\ +\infty & 当\ M=\varnothing\end{cases}$$

定义函数

$$\mu(A,x)=\begin{cases}1-d(x,A')/L & 当\ d(x,A')<d(x,A'') \\ 0.5 & 当\ d(x,A')=d(x,A'') \\ d(x,A'')/L & 当\ d(x,A')>d(x,A'')\end{cases}$$

则 μ 为 X 上的 Fuzzy 结构[6]．

二、模糊结构的扩张

对经典集合论，有经典扩张原理：

定义 2.4.2 设 X、Y 为非空经典集，f: $X\to Y$, 则 f 可以诱导出 $f_\cdot$: $\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$，$A\mapsto f_\cdot(A)\triangleq\{y\mid \exists x\in X,\ y=f(x)\}$及 $f_\cdot^{-1}$: $\mathscr{P}(Y)\to\mathscr{P}(X)$，$B\mapsto f_\cdot^{-1}(B)\triangleq\{x\mid f(x)\in B\}$．称 $f_\cdot(A)$ 为 A 的象，$f_\cdot^{-1}(B)$ 为 B 的逆象．

这里$\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{P}(Y)$分别为 X、Y 的普通幂集．

1975 年，Zadeh, L. A. 把经典扩张原理推广到 Fuzzy 集论中．

定义 2.4.3 设 X、Y 为非空经典集，f: $X\to Y$, $x\mapsto f(x)=y$, 则 f 可以诱导出

$$f_{\cdot}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y), \ A \mapsto f_{\cdot}(A) \tag{2.4.1}$$

及

$$f_{\cdot}^{-1}: \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X), \ B \mapsto f_{\cdot}^{-1}(B) \tag{2.4.2}$$

其中$f_{\cdot}(A)$和$f_{\cdot}^{-1}(B)$由如下两式定义:

$$f_{\cdot}(A)(y) = \bigvee_{f(x)=y} A(x) \qquad (\text{规定} \bigvee_{\emptyset} = 0)$$

$$f_{\cdot}^{-1}(A)(x) = B(f(x))$$

称$f_{\cdot}(A)$为A的象，$f_{\cdot}^{-1}(B)$为B的逆象.

我们希望通过$f: X \to Y$也把X上的Fuzzy结构搬到Y上. 显然有

引理 2.4.1 设X、Y为二非空经典集，若$f: X \to Y$，则当$B_1 \cap B_2 = \emptyset (B_1, B_2 \subseteq Y)$时，$f_{\cdot}^{-1}(B) \cap f_{\cdot}^{-1}(B_2) = \emptyset$.

定理 2.4.1 设X、Y为二非空经典集，μ为X上的Fuzzy结构，$f: X \to Y$为满射. 对$\forall B \in YN(Y)$及$\forall y \in Y$，令

$$\mu^{*}(B, y) = \frac{1}{2}\Big[\bigvee_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x) + \bigwedge_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x)\Big] \tag{2.4.3}$$

则μ^{*}为Y上的Fuzzy结构.

证明 由引理可知，$f_{\cdot}^{-1}(B') \cap f_{\cdot}^{-1}(B'') = \emptyset$，故$\mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x)$是有意义的.

(1) 若$y \in B'$，则$\{x | f(x) = y\} \subseteq f_{\cdot}^{-1}(B')$，从而对$\forall x \in \{x | f(x) = y\}$，由于$\mu$为Fuzzy结构，有$\mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x) = 1$. 于是$\mu^{*}(B, y) = 1$.

类似可证，若$y \in B''$，则$\mu^{*}(B, y) = 0$.

(2) 设$B_1 = (B_1', B_1'')$, $B_2 = (B_2', B_2'')$且$B_1' \subseteq B_2'$, $B_1'' \supseteq B_2''$，则由经典扩张原理的性质，$f_{\cdot}^{-1}(B_1') \subseteq f_{\cdot}^{-1}(B_2')$且$f_{\cdot}^{-1}(B_1'') \supseteq f_{\cdot}^{-1}(B_2'')$. 由于$\mu$为$X$上的Fuzzy结构. 故对$\forall x$，有

$$\mu((f_{\cdot}^{-1}(B_1'), f_{\cdot}^{-1}(B_1'')), x) \leqslant \mu((f_{\cdot}^{-1}(B_2'), f_{\cdot}^{-1}(B_2'')), x)$$

$$\bigvee_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B_1'), f_{\cdot}^{-1}(B_1'')), x) \leqslant \bigvee_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B_2'), f_{\cdot}^{-1}(B_2'')), x)$$

$$\bigwedge_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B_1'), f_{\cdot}^{-1}(B_1'')), x) \leqslant \bigwedge_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B_2'), f_{\cdot}^{-1}(B_2'')), x)$$

从而

$$\begin{aligned}
\mu^*(B_1, y) = \frac{1}{2} [& \bigvee_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B_1'), f_{\cdot}^{-1}(B_1'')), x) + \\
& \bigwedge_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B_1'), f_{\cdot}^{-1}(B_1'')), x)] \\
\leqslant \frac{1}{2} [& \bigvee_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B_2'), f_{\cdot}^{-1}(B_2'')), x) + \\
& \bigwedge_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B_2'), f_{\cdot}^{-1}(B_2'')), x)] = \mu^*(B_2, y).
\end{aligned}$$

(3) $\mu^*(B^c, y) = \mu^*((B'', B'), y)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [\bigvee_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B''), f_{\cdot}^{-1}(B')), x) + \\
&\qquad \bigwedge_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B''), f_{\cdot}^{-1}(B')), x)] \\
&= \frac{1}{2} [\bigvee_{f(x)=y} (1 - \mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x) + \\
&\qquad \bigwedge_{f(x)=y} (1 - \mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x))] \\
&= \frac{1}{2} [(1 - \bigwedge_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x)) + \\
&\qquad (1 - \bigvee_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x))] \\
&= 1 - \frac{1}{2} [\bigvee_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x) + \\
&\qquad \bigwedge_{f(x)=y} \mu((f_{\cdot}^{-1}(B'), f_{\cdot}^{-1}(B'')), x)] = 1 - \mu^*(B, y)
\end{aligned}$$

所以，μ^* 为 Y 上的 Fuzzy 结构．

引理 2.4.2 设 X、Y 为非空经典集，$f: X \to Y$，则 f 为单射的充要条件是：若 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $(A_1, A_2 \in \mathscr{P}(X))$，则 $f.(A_1) \cap f.(A_2) = \emptyset$．

证明 充分性．设 $x_1 \neq x_2$，令 $A_1 = \{x_1\}$，$A_2 = \{x_2\}$，由 $f.(A_1) = \{f(x_1)\}$，$f.(A_2) = \{f(x_2)\}$，且 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$，从而 $\{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \emptyset$．故 $f(x_1) \neq f(x_2)$．所以 f 为单射．

必要性．(用反证法)设 f 为单射，若存在 $A_1, A_2 \in P(X)$，$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ 但 $f.(A_1) \cap f.(A_2) \neq \emptyset$．有 $y \in f.(A_1) \cap f.(A_2)$ 时，由 $y \in f.(A_1)$，$\exists x_1 \in A_1$ 使 $f(x_1) = y$．又由于 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$，故 $x_1 \neq x_2$ 但 $f(x_1) = f(x_2) = y$．因此 f 不是单射．矛盾！

故对 $\forall A_1, A_2 \in \mathscr{P}(X)$，若 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ 则 $f.(A_1) \cap f.(A_2) = \emptyset$．

定理 2.4.2 设 X, Y 为非空经典集，μ 为 Y 上的 Fuzzy 结构，$f: X \to Y$ 为单射．对 $\forall A = (A', A'') \in YN(X)$，$\forall x \in X$，定义

$$\mu.(A, x) = \mu(f.(A'), f.(A'')), f(x)) \tag{2.4.4}$$

则 $\mu.$ 为 X 上的 Fuzzy 结构．

证明 由引理 2.4.2 $\mu((f.(A'), f.(A'')), f(x))$ 有意义．

(1) 若 $x \in A'$，则 $f(x) \in f.(A')$，从而 $\mu.(A, x) = \mu((f.(A'), f.(A'')), f(x)) = 1$．

同理，若 $x \in A''$，则 $\mu.(A, x) = 0$．

(2) 设 $A_1 = (A_1', A_1'')$，$A_2 = (A_2', A_2'')$，若 $A_1' \subseteq A_2'$ 且 $A_1'' \supseteq A_2''$，则 $f.(A_1') \subseteq f.(A_2')$ 且 $f.(A_1') \supseteq f.(A_2'')$．故对 $\forall y \in X$，$\mu((f.(A_1'), f.(A_1'')), y) \leqslant \mu((f.(A_2'), f.(A_2'')), y)$，从而对 $\forall x \in X$，$\mu((f.(A_1'), f.(A_1'')), f(x)) \leqslant \mu((f.(A_2'), f.(A_2'')), f(x))$，即 $\mu.(A_1, x) \leqslant \mu.(A_2, x)$．

(3) $\mu.(A^c, x) = \mu((f.(A''), f.(A')), f(x) = 1 - \mu((f.(A'), f.(A'')), f(x)) = 1 - \mu.(A, x)$．

§5 集合环

一、基本定义

定义 2.5.1 若$\mathscr{A} \subseteq [0,\ 1]$，且满足

(1) $0 \in \mathscr{A}$;

(2) $\lambda \in \mathscr{A} \Rightarrow 1-\lambda \in \mathscr{A}$;

则称$\mathscr{A}$是对称的；若$\mathscr{A}$是对称的，且满足

(3) $\forall \lambda \in \mathscr{A}$，有 $\inf\{s-\lambda | s > \lambda\} = \text{const}$ 则称$\mathscr{A}$是均匀的.

若$\mathscr{A}$是对称的，则 $1 \in \mathscr{A}$，若$\mathscr{A}$是均匀的，则 $0.5 \in \mathscr{A}$.

定义 2.5.2 设$\mathscr{A}$为$[0,1]$的对称子集，映射 $R: \mathscr{A} \to \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$，$\lambda \to (R(\dot{\lambda}), R(\underset{\cdot}{\lambda}))$ 满足：

(1) $R(\dot{0}) = X,\ R(\underset{\cdot}{1}) = \varnothing$;

(2) $\forall \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathscr{A},\ \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow R(\dot{\lambda}_1) \supseteq R(\underset{\cdot}{\lambda}_1) \supseteq R(\dot{\lambda}_2) \supseteq R(\underset{\cdot}{\lambda}_2)$.

则称 R 为 X 上的一个关于$\mathscr{A}$的**集环**，不混淆时简称集环，$R(\dot{\lambda})$ 称为 R 在 λ 处的**外圈**，$R(\underset{\cdot}{\lambda})$ 称为 R 在 λ 处的**内圈**. X 上的关于$\mathscr{A}$的集环的全体记为 $\Phi_{\mathscr{A}}(X)$.

按定义，若$\mathscr{A} = [0,\ 1]$，则一个集环 R 定义了两个集合套：

$$R^0:\ [0,\ 1] \to \mathscr{P}(X),\quad \lambda \mapsto R(\dot{\lambda})$$

$$R_0:\ [0,\ 1] \to \mathscr{P}(X),\quad \lambda \mapsto R(\underset{\cdot}{\lambda})$$

显然有 $T(R^0) = T(R_0)$.

定义 2.5.3 在 $\Phi_{\mathscr{A}}(X)$ 上定义$\vee, \wedge, ^-$如下：

$$\left.\begin{aligned} &R_1 \vee R_2: \forall \lambda \in \mathscr{A}, (R_1 \vee R_2)(\lambda) = (R_1(\dot{\lambda}) \cup R_2(\dot{\lambda}), R_1(\underset{\cdot}{\lambda}) \cup R_2(\underset{\cdot}{\lambda})) \\ &R_1 \wedge R_2: \forall \lambda \in \mathscr{A}, (R_1 \wedge R_2)(\lambda) = (R_1(\dot{\lambda}) \cap R_2(\dot{\lambda}), R_1(\underset{\cdot}{\lambda}) \cap R_2(\underset{\cdot}{\lambda})) \\ &R^-: \forall \lambda \in \mathscr{A}, R^-(\lambda) = ((R(1 \underset{\cdot}{-} \lambda))^c,\ (R(1 \dot{-} \lambda))^c) \end{aligned}\right\} \quad (2.5.1)$$

显然，$R_1 \vee R_2$，$R_1 \wedge R_2$，R^- 都是集环.

定理 2.5.1 $(\Phi_{\mathscr{A}}(X), \vee, \wedge, ^-)$具有如下性质：

(1) **交换律**：$R_1 \vee R_2 = R_2 \vee R_1$，$R_1 \wedge R_2 = R_2 \wedge R_1$；

(2) **结合律**：$R_1 \vee (R_2 \vee R_3) = (R_1 \vee R_2) \vee R_3$；

$R_1 \wedge (R_2 \wedge R_3) = (R_1 \wedge R_2) \wedge R_3$；

(3) **分配律**：$R_1 \vee (R_2 \wedge R_3) = (R_1 \vee R_2) \wedge (R_1 \vee R_3)$；

$R_1 \wedge (R_2 \vee R_3) = (R_1 \wedge R_2) \vee (R_1 \wedge R_3)$；

(4) **吸收律**：$(R_1 \vee R_2) \wedge R_1 = R_1$，$(R_1 \wedge R_2) \vee R_1 = R_1$；

(5) **幂等律**：$R \vee R = R$，$R \wedge R = R$；

(6) **0－1 律**：$\exists\, 0_{\mathscr{A}}, 1_{\mathscr{A}} \in \Phi_{\mathscr{A}}(X)$ 使对 $\forall R \in \Phi_{\mathscr{A}}(X)$ 有

$0_{\mathscr{A}} \vee R = R, 0_{\mathscr{A}} \wedge R = 0_{\mathscr{A}}, R \vee 1_{\mathscr{A}} = 1_{\mathscr{A}}, R \wedge 1_{\mathscr{A}} = R$；

(7) **复原律**：$(R^-)^- = R$；

(8) **对偶律**：$(R_1 \vee R_2)^- = R_1^- \wedge R_2^-$，$(R_1 \wedge R_2)^- = R_1^- \vee R_2^-$.

证明 由 $\mathscr{P}(X)$ 上的运算 $\cup, \cap, ^c$ 的性质立即得 (1)～(5).

(6) $0_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$ 定义为

$$0_{\mathscr{A}}(\lambda) = \begin{cases} (X, \varnothing) & \lambda = 0 \\ (\varnothing, \varnothing) & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

$1_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$ 定义为

$$1_{\mathscr{A}}(\lambda) = \begin{cases} (X, X) & \lambda \neq 1 \\ (X, \varnothing) & \lambda = 1 \end{cases}$$

对 $\forall R \in \Phi_{\mathscr{A}}(X)$，设 $R(\lambda) = (R(\dot{\lambda}), R(\underset{\cdot}{\lambda}))$，则

$$\begin{aligned}(0_{\mathscr{A}} \vee R)(\lambda) &= (0_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda}) \cup R(\dot{\lambda}), 0_{\mathscr{A}}(\underset{\cdot}{\lambda}) \cup R(\underset{\cdot}{\lambda})) \\ &= \begin{cases} (X \cup X, \varnothing \cup R(\underset{\cdot}{0})), & \lambda = 0 \\ (\varnothing \cup R(\dot{\lambda}), \varnothing \cup R(\underset{\cdot}{\lambda})), & \lambda \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (X, R(\underset{\cdot}{0})), & \lambda = 0 \\ (R(\dot{\lambda}), R(\underset{\cdot}{\lambda})), & \lambda \neq 0 \end{cases} \\ &= R(\lambda)\end{aligned}$$

亦即 $0_{\mathscr{A}} \vee R = R$.

$$(0_{\mathscr{A}} \wedge R)(\lambda) = (0_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda}) \cap R(\dot{\lambda}), 0_{\mathscr{A}}(\underset{\cdot}{\lambda}) \cap R(\underset{\cdot}{\lambda}))$$

$$=\begin{cases}(X\cap X,\ \varnothing\cap R(\dot{\lambda})), & \lambda=0\\(\varnothing\cap R(\dot{\lambda}),\ \varnothing\cap R(\lambda), & \lambda\neq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(X,\varnothing), & \lambda=0\\(\varnothing,\varnothing). & \lambda\neq 0\end{cases}$$

$$=0_{\mathscr{A}}(\lambda)$$

$\therefore\quad 0_{\mathscr{A}}\wedge R=0_{\mathscr{A}}.$

$$(1_{\mathscr{A}}\vee R)(\lambda)=(1_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda})\cup R(\dot{\lambda})),\ 1_{\mathscr{A}}(\lambda)\cup R(\lambda))$$

$$=\begin{cases}(X\cup R(\dot{\lambda}),\ X\cap R(\lambda)), & \lambda\neq 1\\(X\cup R(\dot{\lambda}),\ \varnothing\cup R(\lambda), & \lambda=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(X,X), & \lambda\neq 1\\(X,\varnothing), & \lambda=1\end{cases}$$

$$=1_{\mathscr{A}}(\lambda)$$

$\therefore\quad 1_{\mathscr{A}}\vee R=1_{\mathscr{A}}.$

$$(1_{\mathscr{A}}\wedge R)(\lambda)=(1_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda}))\cap R(\dot{\lambda}),\ \ 1_{\mathscr{A}}(\lambda)\cap R(\lambda))$$

$$=\begin{cases}(X\cap R(\dot{\lambda}),\ X\cap R(\lambda)), & \lambda\neq 1\\(X\cap R(\dot{\lambda}),\ \varnothing\cap R(\dot{1})), & \lambda=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(R(\dot{\lambda}),\ R(\lambda)), & \lambda\neq 1\\(R(1),\ \varnothing), & \lambda=1\end{cases}$$

$$=R(\lambda)$$

$\therefore\quad 1_{\mathscr{A}}\wedge R=R.$

(7) $(R^{-})^{-}(\lambda)=((R^{-}(1\dot{-}\lambda))^{c},(R^{-}(1\dot{-}\lambda))^{c})=(((R(\dot{\lambda}))^{c})^{c};$ $((R(\lambda))^{c})^{c})=(R(\dot{\lambda}),R(\lambda))=R(\lambda)$

$\therefore\quad (R^{-})^{-}=R.$

(8) $(R_1\vee R_2)^{-}(\lambda)=(((R_1\vee R_2)(1\dot{-}\lambda))^{c},\ ((R_1\vee R_2)(1\dot{-}\lambda))^{c})$

$=((R_1(1\dot{-}\lambda)\cup R_2(1\dot{-}\lambda))^{c},\ (R_1(1\dot{-}\lambda))\cup R_2(1\dot{-}\lambda)^{c})$

$=((R_1(1\dot{-}\lambda))^{c}\cap(R_2(1\dot{-}\lambda))^{c},(R_1(1\dot{-}\lambda))^{c}\cap(R_2(1\dot{-}\lambda))^{c})$

$=(R_1^-(\dot{\lambda})\cap R_2^-(\dot{\lambda})),\ R_1^-(\underset{\cdot}{\lambda})\cap R_2^-(\underset{\cdot}{\lambda}))$

$=((R_1^-\wedge R_2^-)(\dot{\lambda}),\ (R_1^-\wedge R_2^-)(\underset{\cdot}{\lambda}))=(R_1^-\wedge R_2^-)(\lambda).$

$\therefore\ (R_1\vee R_2)^-=R_1^-\wedge R_2^-.$

同理可证，$(R_1\wedge R_2)^-=R_1^-\vee R_2^-$。

定理 2.5.2 $(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\vee,\wedge,{}^-)$是软代数但不是 Boole 代数.

证明 由定理 1 知$(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\vee,\wedge,{}^-)$为软代数. 下举一例说明补余律不成立. 设$R\in\Phi_{\mathscr{A}}(X)$ 满足: $R(\dot{0})=X$, $R(\underset{\cdot}{0})=B\neq X$, $R(\dot{1})=A$, $R(\underset{\cdot}{1})=\varnothing$ 且 $A\neq B$，则 $A\subseteq B$ 有$B^c\subseteq A^c\neq X$, 从而

$R^-(\dot{0})=X,\ R^-(\underset{\cdot}{0})=A^c,\ R^-(\dot{1})=B^c,\ R^-(\underset{\cdot}{1})=\varnothing$

$(R\vee R^-)(0)=(R(\dot{0}))\cup R^-(\dot{0})),\ R(\underset{\cdot}{0})\cup R^-(\underset{\cdot}{0}))=(X\cup X,$ $B^c\cup A^c)=(X,\ A^c)\neq 1_{\mathscr{A}}\ (0)$

所以 $R\vee R^-\neq 1_{\mathscr{A}}$. 同样可验证 $R\wedge R^-\neq 0_{\mathscr{A}}$. 因此, $(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\vee,\wedge,{}^-)$不是 Boole 代数.

二、集环与 Fuzzy 集的关系

上节中,我们成功地用$(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,{}^c)$和对称集$\mathscr{A}$构造出了一个严格的软代数系统$(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\vee,\wedge,{}^-)$, 它与$(\mathscr{F}(X),\cup,\cap,{}^c)$具有相同的代数性质. 那么, 在近似意义上讲, 是否可以用$(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\vee,\wedge,{}^-)$代替$(\mathscr{F}(X),\cup,\cap,{}^c)$?答案是肯定的,并且当$\mathscr{A}=[0,\ 1]$时这种代替还是精确的.

定理 2.5.3 设 M: $\mathscr{F}(X)\to\Phi_{\mathscr{A}}(X)$, $A\to M(A)$满足: $\forall\lambda\in\mathscr{A}$, $M(A)(\lambda)=(A_\lambda,A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$ (A_λ为 A 的 λ-截集，$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为 A 的 λ-强截集)， 则M为 $(\mathscr{F}(X),\cup,\cap,{}^c)$ 到$(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\vee,\wedge,{}^-)$的同态满射. 并且, 当 $\mathscr{A}=[0,\ 1]$ 时, M是同构映射.

证明 首先说明 M 的合理性. $M(A)$: $\forall\lambda\in\mathscr{A}$, $M(A)(\lambda)$

$=(A_\lambda,\ A_{\underset{\cdot}{\lambda}})$ 为 X 上的集环．事实上

(1) $\forall A\in\mathscr{F}(X)$，$M(A)(\dot{0})=A_0=X,\ M(A)(\underset{\cdot}{1})=A_{\underset{\cdot}{1}}=\varnothing$；

(2) 由截集与强截集的性质知，$\forall\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathscr{A}$，当 $\lambda_1<\lambda_2$ 时，$A_{\lambda_1}\supseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}_1}\supseteq A_{\lambda_2}\supseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}_2}$，即 $M(A)(\dot{\lambda}_1)\supseteq M(A)(\underset{\cdot}{\lambda}_1)\supseteq M(A)(\dot{\lambda}_2)$ $\supseteq M(A)(\underset{\cdot}{\lambda}_2)$．

其次，当 $A=B$ 时，$\forall\lambda\in[0,\ 1]$ 都有 $A_\lambda=B_\lambda$ 且 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$。故当 $\lambda\in\mathscr{A}$ 时 $M(A)(\dot{\lambda})=M(B)(\dot{\lambda})$ 且 $M(A)(\underset{\cdot}{\lambda})=M(B)(\underset{\cdot}{\lambda})$，即 $M(A)=M(B)$．所以 M 是一个映射。

第三，$\forall A,\ B\in\mathscr{F}(X)$，$\forall\lambda\in\mathscr{A}$ 有

$M(A\cup B)(\lambda)=((A\cup B)_\lambda,\ (A\cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}})=(A_\lambda\cup B_\lambda,\ A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$

$(M(A)\vee M(B))(\lambda)=(M(A)(\dot{\lambda})\cup M(B)(\dot{\lambda}),\ M(A)(\underset{\cdot}{\lambda})\cup M(B)(\underset{\cdot}{\lambda}))=(A_\lambda\cup B_\lambda,\ A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$

$\therefore\quad M(A\cup B)=M(A)\vee M(B)$．

同理 $M(A\cap B)=M(A)\wedge M(B)$．

又由截集的定义知：$(A^c)_\lambda=(A_{1\underset{\cdot}{-}\lambda})^c$ 且 $(A^c)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(A_{1-\lambda})^c$．故，当 $\lambda\in\mathscr{A}$ 时

$M(A^c)(\lambda)=((A^c)_\lambda,\ (A^c)_{\underset{\cdot}{\lambda}})=((A_{1\underset{\cdot}{-}\lambda})^c,\ (A_{1-\lambda})^c)$

$(M(A^c))^-(\lambda)=((M(A)(1\underset{\cdot}{-}\lambda))^c,\ (M(A)(1\dot{-}\lambda))^c)=((A_{1\underset{\cdot}{-}\lambda})^c,\ (A_{1-\lambda})^c)$．

$\therefore\quad M(A^c)=(M(A))^-$．

所以，M 是同态映射．

第四，$\forall R\in\Phi_{\mathscr{A}}(X)$，令

$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}((\lambda(\bigcup_{\substack{\lambda'\geqslant\lambda\\ \lambda'\in\mathscr{A}}}R(\dot{\lambda}')-\bigcup_{\substack{\lambda'\geqslant\lambda\\ \lambda'\in\mathscr{A}}}R(\underset{\cdot}{\lambda}'))\cup(\lambda\bigcup_{\substack{\lambda'\geqslant\lambda\\ \lambda'\in\mathscr{A}}}R(\underset{\cdot}{\lambda}'))$$

则 $A_\lambda=R(\dot{\lambda})\quad A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=R(\underset{\cdot}{\lambda})\quad(\forall\lambda\in\mathscr{A})$，即 $M(A)=R$．所以 M 是满射．

第五，当 $\mathscr{A}=[0,\ 1]$ 时，若 $M(A)=M(B)$，则对 $\forall\lambda\in[0,1]$，$A_\lambda=B_\lambda$，故 $A=B$．所以，此时 M 是同构映射．

设 $\mathscr{A}$ 为$[0,1]$ 的对称子集，在 $\mathscr{F}(X)$ 上定义二元关系 “$\sim_{\mathscr{A}}$”：

$$A \sim_{\mathscr{A}} B \Longleftrightarrow M(A)=M(B)$$

显然，“$\sim_{\mathscr{A}}$”满足

i) 自反性：$A \sim_{\mathscr{A}} A$

ii) 对称性：$A \sim_{\mathscr{A}} B \Rightarrow B \sim_{\mathscr{A}} A$

iii) 传递性：$A \sim_{\mathscr{A}} B$ 且 $B \sim_{\mathscr{A}} C \Rightarrow A \sim_{\mathscr{A}} C$

所以，“$\sim_{\mathscr{A}}$”是$\mathscr{F}(X)$上的等价关系．记 $\mathscr{F}'_{\mathscr{A}}(X) \triangleq \mathscr{F}(X)/\sim_{\mathscr{A}}$，其元素记为$[A]_{\mathscr{A}}$样，常记为$[A]$.

定义 2.5.4 在 $\mathscr{F}_{\mathscr{A}}(X)$ 中定义运算 $\cup^*$, $\cap^*$, ^{c*}:

$$\left.\begin{aligned} &[A]\cup^*[B]=[A\cup B] \\ &[A]\cap^*[B]=[A\cap B] \\ &[A]^{c*}=[A^c] \end{aligned}\right\} \qquad (2.5.2)$$

注：运算 $\cup^*$, $\cap^*$, ^{c*} 与代表选择无关．事实上，若 $A' \sim_{\mathscr{A}} A$, $B' \sim_{\mathscr{A}} B$，则对 $\forall \lambda \in \mathscr{A}$，有

$$A'_{\lambda} = A_{\lambda} \quad 且 \quad A'_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

$$B'_{\lambda} = B_{\lambda} \quad 且 \quad B'_{\underset{\cdot}{\lambda}} = B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

故当 $\lambda \in \mathscr{A}$ 时

$$(A' \cup B')_{\lambda} = A'_{\lambda} \cup B'_{\lambda} = A_{\lambda} \cup B_{\lambda} = (A\cup B)_{\lambda}$$

$$(A' \cup B')_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A'_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cup B'_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (A\cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

$$(A' \cap B')_{\lambda} = A'_{\lambda} \cap B'_{\lambda} = A_{\lambda} \cap B_{\lambda} = (A\cap B)_{\lambda}$$

$$(A' \cap B')_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A'_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cap B'_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (A\cap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

$$((A')^c)_{\lambda} = (A'_{1\underset{\cdot}{-}\lambda})^c = (A_{1\underset{\cdot}{-}\lambda})^c = (A^c)_{\lambda}$$

$$((A')^c)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (A'_{1-\lambda})^c = (A_{1-\lambda})^c = (A^c)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

所以 $A'\cup B' \sim_{\mathscr{A}} A\cup B$, $A'\cap B' \sim_{\mathscr{A}} A\cap B$, $(A')^c \sim_{\mathscr{A}} A^c$.

由“$\sim_{\mathscr{A}}$”的定义及定理2.5.3，立即得

定理 2.5.4 $(\mathscr{F}_{\mathscr{A}}(X), \cup^*, \cap^*, {}^{c*})$ 与 $(\Phi_{\mathscr{A}}(X), \vee, \wedge, {}^{-})$ 同构.

有趣的是当$\mathscr{A}$为有限均匀对称集时，$M(A)$ 给出了 A 的一组

"等高线".形象地说，A 是一座山，$M(A)$ 就是这座山的地形图. 只要等高线足够地密集，则 $\mathscr{F}(X)$ 的分类就足够地细，说明"地形图"的逼真程度依 $\mathscr{A}$ 的势增大而增大，以致当 $\mathscr{A}=[0, 1]$ 时，"地形图"就是"山"本身了.

三、集环与是非集对的关系

在本段中 $\mathscr{A}=\{0, 1\}$. 此时，$\forall R\in\Phi_{\{0,1\}}(X)$ 均可记为 $(X, A, B, \varnothing)$ 的形式 $(A\supseteq B)$，它由 A、B 唯一确定，即由 A^c、B 唯一确定. 这里 A 表示 $R(\dot{0})$, B 表示 $R(\dot{1})$.

$YN(X)=\{(A, B)|A, B\in\mathscr{P}(X), A\cap B=\varnothing\}$，其上的运算定义为

$(A_1, B_1)\oplus(A_2, B_2)=(A_1\cup A_2, B_1\cap B_2)$

$(A_1, B_1)\odot(A_2, B_2)=(A_1\cap A_2, B_1\cup B_2)$

$(A_1, B_1)^c=(B_1, A_1)$.

定理 2.5.5 当 $\mathscr{A}=\{0, 1\}$ 时，$(\Phi_{\mathscr{A}}(X), \vee, \wedge, ^{-})$ 与 $(YN(X), \oplus, \odot, ^c)$ 同构.

证明 设 $f: \Phi_{\{0,1\}}(X)\to YN(X)$, $R\to f(R)$ 由以下方式确定:

如果 $R=(X, A, B, \varnothing)$ 则 $f(R)=(B, A^c)$

按 R 的定义，$A\supseteq B$, 故 $A^c\cap B=\varnothing$, 即 $f(R)\in YN(X)$. 又若 $R_1=R_2(R_1=(X, A_1, B_1, \varnothing), R_2=(X, A_2, B_2, \varnothing))$, 则 $A_1=A_2$ 且 $B_1=B_2$. 从而 $A_1^c=A_2^c$ 且 $B_1=B_2$, 即 $f(R_1)=f(R_2)$. 因此 f 的定义是合理的.

往证 f 是同态映射. 设 $R_1=(X, A_1, B_1, \varnothing)$, $R_2=(X, A_2, B_2, \varnothing)$, 那么

$f(R_1\vee R_2)=f(X\cup X, A_1\cup A_2, B_1\cup B_2, \varnothing)=f(X, A_1\cup A_2, B_1\cup B_2, \varnothing)=(B_1\cup B_2, (A_1\cup A_2)^c)=(B_1\cup B_2, A_1^c\cap A_2^c)=(B_1, A_1^c)\oplus(B_2, A_2^c)=f(R_1)\oplus f(R_2)$.

同理，$f(R_1\wedge R_2)=f(R_1)\odot f(R_2)$.

又设$R=(X,A,B,\varnothing)$，则按R^-的定义，$R^-=(X,B^c,A^c,\varnothing)$，故 $f(R^-)=f(X,B^c,A^c,\varnothing)=(A^c,(B^c)^c)=(A^c,B)=(B,A^c)^c=(f(R))^c$。

所以 f 是同态映射。

又定义 f^{-1}: $YN(X)\to\Phi_{\{0,1\}}(X)$

$$(A,B)\to(X,B^c,A,\varnothing),$$

易证 f^{-1} 为 f 的逆映射，故 f 为同构映射。

定理2.5.5说明集对表示方法是集环表示方法的特殊情形。

参考文献

1 Dubois, D. and Prade, H.. Fuzzy Sets and Systems. New York, 1980

2 罗承忠．模糊集与集合套．模糊数学，1983; 4: 113—126

3 罗承忠．可列集合套．模糊系统与数学，1991; (5)1: 1—6

4 刘文奇．公理模糊集合论初探．模糊系统与数学，1992; 6(增): 441—443

5 刘文奇．模糊推理的数学原理．见：模糊分析设计的理论与应用，第三届全国模糊分析设计学术会议．北京：中国建筑工业出版社，1993 528—533

6 刘文奇．模糊结构的扩张原理．中南地区模糊数学与系统分会第二届年会论文集，海口，1993: 36—39

7 刘文奇．YN(X)上的可测结构．北京师范大学学报(自然科学版)，1995; 31(增): 32—38

8 刘文奇．集对分析的理论及应用．北师大硕士学位论文，1995

9 刘文奇．从Boole代数到一般软代数的对称扩张．兰州大学学

报(自然科学版)，1996; 模糊专集: 124—128
10 刘文奇，罗承忠．集合环．模糊系统与数学，1997; 11(2): 34—39
11 罗承忠．模糊集引论．北京:北京师范大学出版社，1987
12 汪培庄．模糊集合论及其应用．上海:上海科学技术出版社，1983
13 Thomas, J.. Set Theory. London: Academic Press, 1978
14 刘文奇．不确定性数学大纲．昆明:云南大学出版社，1995

第三章 Fuzzy 集的随机集落影表现

§1 可测结构与超可测结构

一、可测结构、可测函数与测度空间

定义 3.1.1 设 X 为非空集合，$\mathscr{P}(X)$ 为 X 的经典幂集，$\Sigma \subseteq \mathscr{P}(X)$，若 Σ 满足

(1) $X \in \Sigma$

(2) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$

(3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

则称 Σ 为 X 上的 **σ 代数**；(X, Σ) 为**可测结构(或可测空间)**；若 $A \in \Sigma$，则称 A 为 X 的**可测子集**.

σ 代数从本质上讲就是含X的满足差,可列并、可列交封闭的子集族.它是直线 R^1上 Borel 集族的一个推广．换言之，Borel 集族为 R^1 中的 σ 代数．更一般地，若$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，则以开集和闭集作为对象经过至多可列次或并或交的运算获得的集族(广义 Borel 集族)一定是 X 上的 σ 代数．对此类 σ 代数，有两个基本子族 G_σ 和 F_σ，依次有 $G_\sigma=\{A|A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathscr{T}\}$，$F_\sigma=\{A|A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n^c \in \mathscr{T}\}$.

实际上，σ 代数的另一定义是

定义 3.1.1 设 X 为非空集合，$\mathscr{P}(X)$ 为 X 的经典幂集，Σ

$\subseteq \mathscr{P}(X)$，若 Σ 满足

(1) $X\in\Sigma$

(2)′ $A, B\in \Sigma \Rightarrow A-B\in\Sigma$

(3)″ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\uparrow A$ 且 $A_n\in\Sigma\ (n=1,\ 2,\cdots)\Rightarrow A\in\Sigma$

则称 Σ 为 X 上的 σ 代数．

定义 3.1.2 设 (X, Σ) 为可测结构，$f: X\to R^1$，若对 $\forall c\in R^1$

$$\{x|f(x)<c\}\in\Sigma \tag{3.1.1}$$

则称 f 为 **Σ-可测函数，简称可测函数．**

由于 Σ 为 σ 代数，所以(3.1.1)还有很多等价的说法，如

(1) $\{x|f(x)\geqslant c\}\in\Sigma \quad (\forall c\in R^1)$

(2) $\{x|f(x)\in B\}\in\Sigma \quad$ ($\forall B$ 为 R^1 上一Borel 集)

简言之，f 可测 $\Longleftrightarrow f^{-1}(B)\in\Sigma$

例 3.1.1 X 上的任一函数都是 $\mathscr{P}(X)$-可测的．

例 3.1.2 $f(x)\equiv c$ 对任一可测结构 (X, Σ) 都是 Σ-可测的．

例 3.1.3 X 的子集 A 的示性函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}0 & x\notin A\\ 1 & x\in A\end{cases}$$

为 Σ-可测的充要条件是 $A\in\Sigma$．

可测函数也称随机变量(概率语言)，它总是相对于某可测结构而言的．

二、超可测结构与随机集

定义 3.1.3 设 X 为非空集合，$\mathscr{P}(X)$ 为其经典幂集，对 $\forall\ x\in X$ 及 $A\subseteq X$，记

$$\dot{x}=\{B|x\in B\}$$

$$\dot{A}=\{\dot{x}|x\in A\}$$

若 Σ^* 为 $\mathscr{P}(X)$ 上包含 $\dot{X}$ 的 σ-代数，则称 $(\mathscr{P}(X), \Sigma^*)$ 为 X 上的一个**超可测结构(或超可测空间)．**

超可测结构也可以按超 Borel 集类方式予以构造，这当然需要首先建立 X 上的超拓扑结构 $(\mathscr{P}(X), \mathscr{T}^*)$，再用 $\mathscr{T}^*$ 构作超 Borel 集族，从而获得超可测结构。如果我们已知 (X, Σ) 为可测空间（$(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间），如何将这种可测结构（拓扑结构）延伸到 $\mathscr{P}(X)$ 上来构作超可测结构（超拓扑结构），这就是所谓提升问题。同样的提升问题在代数结构、序结构等其他数学结构中也是广泛存在的。对此，汪培庄等人已经做了很多工作[1]。

定义 3.1.4 $(\mathscr{P}(X), \Sigma^*)$ 为超可测空间，$(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间，$\xi: \Omega \to \mathscr{P}(X)$ 若对 $\forall \mathscr{A} \in \Sigma^*$ 有

$$\xi^{-1}(\mathscr{A}) = \{\omega | \xi(\omega) \in \mathscr{A}\} \in \mathscr{F} \tag{3.1.2}$$

则称 ξ 为 X 上的一个**随机集**。

这个定义是相当广泛的，另外还有一些比较窄的定义。如先给出 $\mathscr{P}(X)$ 上的超拓扑，进而获得相应的广义超 Borel 集族 $\mathscr{B}^*$，然后将(3.1.2)改为：

$$对\ \forall \mathscr{B} \in \mathscr{B}^*,\quad \xi^{-1}(\mathscr{B}) \in \mathscr{F} \tag{3.1.3}$$

甚至，可以把超 Borel 集族的构造方法限定在某种特定的提升超拓扑之上，从而得到一些更狭义的随机集定义。比如改(3.1.2)为：

定义 3.1.4′ 设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，$(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间，$\xi: \Omega \to \mathscr{P}(X)$，若对 $\forall$ 开集 G 有

$$\xi^{-1}(G) = \{\omega | \xi(\omega) \cap G \neq \emptyset\} \in \mathscr{F} \tag{3.1.4}$$

则称 ξ 为**随机集**。

文献[2] 中即采用此种定义，只是限定了 X 上的拓扑为度量拓扑以便作更深入的研究。

三、超拓扑

设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{P}(X)$ 为 X 的经典幂集，$\mathscr{P}_0(X)$ 为 $\mathscr{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$（有时称为超空间）。对任意 $B \in \mathscr{P}(X)$，记

$$I^*(B)=\{A\in\mathscr{P}_0(X)|A\subseteq B\}$$
$$I_*(B)=\{A\in\mathscr{P}_0(X)|A\cap B\neq\varnothing\}$$
显然有 $I^*(B)\subset I_*(B)$。记
$$\mathscr{T}^*=\{I^*(G)|G\in\mathscr{T}\}$$
$$\mathscr{T}_*=\{I_*(G)|G\in\mathscr{T}\}$$
这里因为对 $\forall\, G_1,\ G_2\in\mathscr{T}$，有
$$I^*(G_1\cap G_2)=I^*(G_1)\cap I^*(G_2)$$
$$I_*(G_1\cup G_2)=I_*(G_1)\cup I_*(G_2)$$
故$\mathscr{T}^*$对交封闭，而$\mathscr{T}_*$对并封闭。

定义 3.1.5 以 $\mathscr{T}^*$ 为基的拓扑为超空间 $\mathscr{P}_0(X)$ 上的上超拓扑，记为$\mathscr{T}_u$；以 $\mathscr{T}_*$ 为子基的拓扑称为超空间 $\mathscr{P}_0(X)$ 上的下超拓扑，记为$\mathscr{T}_l$；以
$$\mathscr{T}=\mathscr{T}^*\cup\mathscr{T}_*$$
为子基的拓扑称为超空间$\mathscr{P}_0(X)$上的 Vietoris 拓扑，记为$\mathscr{T}_v$。

若对 $G_1, G_2, \cdots, G_n\in\mathscr{T}$，记
$$I(G_1,\ \cdots,\ G_n)=\{A\in\mathscr{P}_0(X)|A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_i,\ A\cap G_i\neq\varnothing$$
$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\}$

则 Vietoris 拓扑是以 $\mathscr{B}^*=\{I(G_1,\cdots,\ G_n)|G_i\in\mathscr{T},\ n\geq 1,\ i=1,\ 2,\cdots,\ n\}$ 为子基的拓扑。

Vietoris 拓扑是由$\mathscr{T}$提升起来的$\mathscr{P}_0(X)$上的一种很强的拓扑。从理论上讲，由于方式不同，经过对底拓扑$\mathscr{T}$提升可以获得八种 $\mathscr{P}_0(X)$上的超拓扑（参见[1], 99～100），Vietoris 拓扑即为其中的 T_1[1]。

由 $\mathscr{T}_v$ 生成的 σ 代数记为 $\sigma(\mathscr{T}_v)$，称$(\mathscr{P}(X),\ \sigma(\mathscr{T}_v))$为 X 上的 Vietoris 超拓扑可测结构，$\sigma(\mathscr{T}_v)$ 称为 Vietoris 广义超 Borel 集族。在这种集族基础上定义的随机集即为(3.1.4′)。

§2 随机集的落影

定义 3.2.1 设$(\Omega, \mathscr{F})$为可测空间，$m: \mathscr{F} \to [0, 1]$满足

(1) $m(X)=1$

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$且$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j) \Rightarrow m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

则称m为$\mathscr{F}$上的**概率测度或概率**，$(\Omega, \mathscr{F}, m)$为**概率空间**。

定义 3.2.1′ 设X为非空基本集，$(\mathscr{P}(X), \Sigma^*)$为超可测结构，$(\Omega, \mathscr{F}, m)$为概率空间，$\xi: \Omega \to \mathscr{P}(X)$为随机集，定义

$$\mu_\xi(x) = m\{\omega | \xi(\omega) \ni x\} \tag{3.2.1}$$

称$\mu_\xi(x)$为ξ的**落影函数**(或**落影**,可简记为$\xi(x)$). 若X的某个Fuzzy子集的隶属度函数$A(x)=\mu_\xi(x)$,则称ξ为A的**云**,A为ξ的**落影Fuzzy集**(或**落影**).

易见 $\xi(x) = m\{\omega | \xi(\omega) \in \dot{x}\}$ (3.2.2)

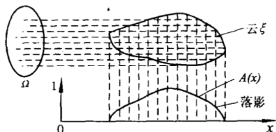


图 3.2.1

定义 3.2.2 设$(\mathscr{P}(X), \Sigma_1^*)$, $(\mathscr{P}(Y), \Sigma_2^*)$为超可测结构，$\xi: \Omega \to \mathscr{P}(X)$, $\eta: \Omega \to \mathscr{P}(Y)$为随机集，记

$$\mu_{(\xi, \eta)}(x, y) = m\{\omega | \xi(\omega) \ni x, \eta(\omega) \ni y\} \tag{3.2.3}$$

称之为ξ与η的**联合落影**；若$\mu_\xi(x)>0$, 记

$$\mu_{\eta|\xi}(y | x) = m\{\eta(\omega) \ni y | \xi(\omega) \ni x\} \tag{3.2.4}$$

称$\mu_{\eta|\xi}(y|x)$为η在$x \in \xi_{(\omega)}$处的**条件落影**.

定义 3.2.3 设 $(\mathscr{P}(X), \Sigma_1^*)$、$(\mathscr{P}(Y), \Sigma_2^*)$ 为超可测结构，$\xi: \Omega \to \mathscr{P}(X)$，$\eta: \Omega \to \mathscr{P}(Y)$ 为随机集，若对 $\forall C_i \in \Sigma_i^*$ $(i=1, 2)$ 均有

$$m\{\omega | \xi(\omega) \in C_1, \ \eta(\omega) \in C_2\}$$
$$= m\{\omega | \xi(\omega) \in C_1\} \cdot m\{\omega | \xi(\omega) \in C_2\} \qquad (3.2.5)$$

则称 ξ 与 η 是独立的。

命题 3.2.1 ξ 与 η 独立的必要条件是

$$\mu_{(\xi, \eta)}(x, y) = \mu_\xi(x) \cdot \mu_\eta(x) \qquad (3.2.6)$$

给定义上的 Fuzzy 子集 A，可以有无限多个云以它为落影，这就要从一类云中寻找一个云作代表，通常取所谓截云，它是这样一个随机集 $\xi: [0, 1] \to \mathscr{P}(X)$, $\lambda \mapsto A_\lambda$（其中[0, 1]上的 σ 代数取为 Borel 集族）。

定义 3.2.4 设 $([0, 1]^2, \mathscr{B}_0^2, p)$ 为概率空间，若 p 满足：对 $\forall A$、$B \in \mathscr{B}_0$

$$p(A \times [0, 1]) = m(A), \ p([0, 1] \times B) = m(B)$$

（其中 $([0, 1], \mathscr{B}_0, m)$ 为概率空间）则称 p 为 $[0, 1]^2$ 中的**联合尺度分布**。

显然联合尺度分布为边际分布。常用的联合尺度分布可用密度函数为

(a) $p(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x = y \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(b) $p(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x = 1 - y \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(c) $p(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x, \ y \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

来描述。(a)、(b)和(c)依次称为正变型、反变型和独立型。

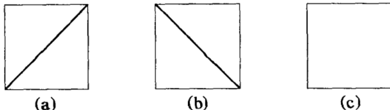


图 3.2.2

定义 3.2.5 设($[0, 1]^2, \mathscr{B}_0^2, p$)为概率空间，$p$ 为联合尺度分布，($\mathscr{P}(X), \Sigma^*$)为超可测结构，$A, B \in \mathscr{F}(X)$ ($\mathscr{F}(X)$ 为 X 的 Fuzzy 幂集)，定义随机集

$$\xi: [0, 1]^2 \to \mathscr{P}(X), \quad (\lambda, \mu) \mapsto A_\lambda \tag{3.2.7}$$

$$\eta: [0, 1]^2 \to \mathscr{P}(X), \quad (\lambda, \mu) \mapsto B_\mu \tag{3.2.8}$$

称 ξ 和 η 分别为 A、B 的**扩展截云**.

定义 3.2.6 对(3.2.7)和(3.2.8)所定义的随机集定义并 $\xi \cup \eta$ 和交 $\xi \cap \eta$ 如下:

$$(\xi \cup \eta)(\lambda,\mu) = \xi(\lambda,\mu) \cup \eta(\lambda,\mu) \tag{3.2.9}$$

$$(\xi \cap \eta)(\lambda,\mu) = \xi(\lambda,\mu) \cap \eta(\lambda,\mu) \tag{3.2.10}$$

显然 $\xi \cup \eta$, $\xi \cap \eta$ 也为随机集。易见

$$\xi \cup \eta: [0, 1]^2 \to \mathscr{P}(X), \quad (\lambda,\mu) \mapsto A_\lambda \cup B_\mu \tag{3.2.11}$$

$$\xi \cap \eta: [0, 1]^2 \to \mathscr{P}(X), \quad (\lambda,\mu) \mapsto A_\lambda \cap B_\mu \tag{3.2.12}$$

定义 3.2.7 设 $A, B \in \mathscr{F}(X)$，随机集 ξ, η 定义如(3.2.7)和(3.2.8)，$\xi \cup \eta$ 和 $\xi \cap \eta$ 的定义如(3.2.9)和(3.2.10)，称 $\xi \cup \eta$ 的落影为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$; 称 $\xi \cap \eta$ 的落影为 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$.

命题 3.2.2 $A \cup B$ 和 $A \cap B$ 的隶属度函数公式为

$$\left.\begin{aligned} (A \cup B)(x) &= p\{(\lambda,\mu) | (\xi \cup \eta)(\lambda,\mu) \in \dot{x}\} \\ &= p\{(\lambda, \mu) | x \in A_\lambda \cup B_\mu\} \\ (A \cap B)(x) &= p\{(\lambda, \mu) | x \in A_\lambda \cap B_\mu\} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.13}$$

下面的图 3.2.3 可以帮助我们理解(3.2.13)式。

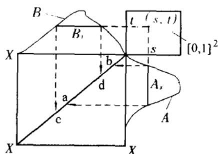


图 3.2.3

以点 $(A(x), B(x))$ 为中心，将 $[0, 1]^2$ 分为四个区域(图 3.2.4)，并依次记为 E_1、E_2、E_3、E_4:

$$E_1=[0,A(x)]\times[0,B(x)]$$

$$E_2=[0,A(x)]\times[B(x),1]$$

$$E_3=[A(x),1]\times[0,B(x)]$$

$$E_4=[A(x),1]\times[B(x),1]$$

相应的 u 依次属$[b, c]^c$、$[c, a]$、$[d, a]$、$[b, d]$. 由此可见：$x\in A_s\cup B_t$ 当且仅当 $(s, t)\in E_1\cup E_2\cup E_4$；$x\in A_s\cap B_t$ 当且仅当 $(s, t)\in E_1$。所以我们有

定理 3.2.1 设 A、$B\in\mathscr{F}(X)$，按定义 3.2.7 定义的 Fuzzy 集运算可由下式表达

$$A\cup B(x)=p(E_1\cup E_2\cup E_4) \tag{3.2.14}$$

$$A\cap B(x)=p(E_1) \tag{3.2.15}$$

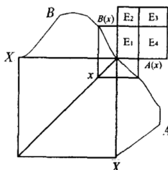


图 3.2.4

形如"若 x 是 a, 则 y 是 b"这样的推理句，涉及两个不同的变元 x 和 y，它们可以分别属于两个不同的论域 X 与 Y，因而是一个二元谓词，记为 $(a(x))\rightarrow(b(y))$。它的真域是 $X\times Y$ 的子集或 Fuzzy 子集，也可以看作是 X 到 Y 的关系或 Fuzzy 关系。

若 a, b 所表示的概念都是确切的，则此推理句为普通推理句，其真域为集合 $R\in\mathscr{P}(X\times Y)$，有

$$R=\{(x, y)\mid(a(x))\rightarrow(b(y))\text{ 对 }(x, y)\text{ 真}\}$$

$$=\{(x, y)\mid(a)\text{ 对 }x\text{ 真且 }(b)\text{ 对 }y\text{ 真}\}\cup\{(x, y)\mid(a)\text{ 对 }x\text{ 假}\}$$

$$=\{x, y)\mid x\in P\text{ 且 }y\in Q\}\cup\{(x, y)\mid x\in P^c\}$$

$$=(P\times Q)\cup(P^c\times Y) \tag{3.2.16}$$

(其中 P, Q 分别为(a)和(b)的真域)。R 的形状如工字形。现在将考虑将它扩展为一个 Fuzzy 关系，仍采用上述方法，即分别将 P、Q 提到"天上"考虑它们的云，对于固定的 $\omega\in\Omega$, 它们是两个普通集合，按(3.2.16)得到一个工字形集合，当 ω 变动时，就形成一个随机集，然后再让它落下来，得到 $X\times Y$ 上的一个 Fuzzy 集。它是一个 Fuzzy 关系，也就是我们寻求的 Fuzzy 推理关系。

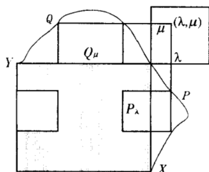


图 3.2.5

设 $P\in\mathscr{F}(X)$, $Q\in\mathscr{F}(Y)$, ξ,η 分别代表 P,Q 的截云，可以视为概率空间 $([0,1]^2,\mathscr{B}_0^2,p)$上的随机集 (其中 p 为给定联合尺度分布)。

即

$$\xi:\ [0,1]^2\to\mathscr{P}(X)$$
$$(\lambda,\mu)\mapsto P_\lambda$$
$$\eta:\ [0,1]^2\to\mathscr{P}(Y)$$
$$(\lambda,\mu)\mapsto Q_\mu$$

定义

$$\xi\to\eta:\ [0,1]^2\to\mathscr{P}(X\times Y)$$
$$(\lambda,\mu)\mapsto(P_\lambda\times Q_\mu)\cup(P_\lambda^c\times Y) \tag{3.2.17}$$

易知 $\xi\to\eta$ 为随机集。

定义 3.2.8 设 $P\in\mathscr{F}(X)$, $Q\in\mathscr{F}(Y)$, Fuzzy 蕴涵式 $(P(x))\to(Q(y))$ 的推理关系可定义为随机集 $\xi\to\eta$ 的落影:

$$(P\to Q)(x,y)=p\{(\lambda,\mu)|(x,y)\in(\xi\to\eta)(\lambda,\mu) \tag{3.2.18}$$

定义的含义可参考图 3.2.5。

容易证明:

定理 3.2.2 设 $P\in\mathscr{F}(X)$, $Q\in\mathscr{F}(Y)$, 则 Fuzzy 推理关系的隶属度函数可按下式来计算:

$$(P\rightarrow Q)(x,\ y)=p(E_1\cup E_3\cup E_4) \tag{3.2.19}$$

根据$([0,\ 1]^2,\ \mathscr{B}_0^2,\ p)$中联合尺度分布的不同取法，可以获得(3.2.14)、(3.2.15)和(3.2.19)的不同具体形式．以正变型、反变型和独立型为例，可以获得如下具体形式。

定理 3.2.3 设 $A, B, P\in\mathscr{F}(X)$、$Q\in\mathscr{F}(Y)$，p 为正变型联合尺度分布，则(3.2.14)，(3.2.15)和(3.2.19)式具体化为

$$(A\cup B)(x)=\max(A(x),\ B(x)) \tag{3.2.20}$$

$$(A\cap B)(x)=\min(A(x),\ B(x)) \tag{3.2.21}$$

$$(P\rightarrow Q)(x,\ y)=\min(1-P(x)+Q(y),\ 1) \tag{3.2.22}$$

证明 如图 3.2.6 所示，E_1，E_2，E_3，E_4 的划分与对角线的相对位置可分为(a)，(b)两种情况。

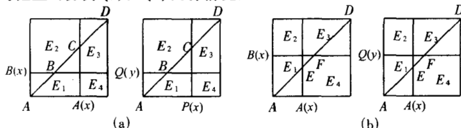


图 3.2.6

由于 p 全部集中在对角线上，在(a)的情形下，有

$$p(E_1\cup E_2\cup E_4)=p(\overline{AC})=A(x)$$

$$p(E_1)=p(\overline{AB})=B(x)$$

$$p(E_1\cup E_3\cup E_4)=p(\overline{AB})+p(\overline{CD})=Q(y)+1-P(x)$$

在情形(b)下，有

$$p(E_1\cup E_2\cup E_4)=p(\overline{AF})=B(x)$$

$$p(E_1)=p(\overline{AE})=A(x)$$

$$p(E_1\cup E_3\cup E_4)=p(\overline{AD})=1$$

注意情形(a)、(b)是依 $A(x)>B(x)$ $(P(x)>Q(y))$ 及 $A(x)<B(x)(P(x)<Q(y))$而划分的，由此立即得(3.2.20)、(3.2.21)和(3.2.22)。

(3.2.20)、(3.2.21)和(3.2.22)分别为 Zadeh 的并、交运算和

Lukasiewiez 推理关系式。

定理 3.2.4 设 A、B、$P\in\mathscr{F}(X)$，$Q\in\mathscr{F}(Y)$，p 为反变型联合尺度分布，则(3.2.14)、(3.2.15)和(3.2.19)式具体化为

$$(A\cup B)(x)=\min(A(x)+B(x),\ 1) \tag{3.2.23}$$

$$(A\cap B)(x)=\max(A(x)+B(x)-1,\ 0) \tag{3.2.24}$$

$$(P\rightarrow Q)(x,\ y)=\max(1-P(x),\ Q(y)) \tag{3.2.25}$$

它们分别为有界和、差运算及 Zadeh 的推理关系。

定理 3.2.5 设 A、B、$P\in\mathscr{F}(X)$，$Q\in\mathscr{F}(Y)$，p 为独立型联合尺度分布，则(3.2.14)、(3.2.15)和(3.2.19)式具体化为

$$(A\cup B)(x)=A(x)+B(x)-A(x)B(x) \tag{3.2.26}$$

$$(A\cap B)(x)=A(x)B(x) \tag{3.2.27}$$

$$(P\rightarrow Q)(x,\ y)=1-P(x)+P(x)Q(y) \tag{3.2.28}$$

它们是概率和、概率积及概率型推理关系。

定理 3.2.4 及定理 3.2.5 的证明与定理 3.2.3 的证明相类似。

λ 与 μ 的大小分别表示我们在度量参与运算的两个 Fuzzy 集的范围时所采取的松紧尺度。λ 低、A_λ 大，表示我们对 A 的变量尺度放宽，反之则表示卡严，μ 的情况也类似。正变型表示我们对二者的宽严程度量同步的；反变型表示我们对二者的宽严程度量反位的，即一个从严时另一个从宽，一个从宽时另一个从严；独立型则表示二者的宽严程度是均匀搭配的。一般地说，对于正相关的两个概念，比如"身强"与"力壮"，应当取正变型联合尺度分布；对反相关的两个概念，比如"健康"与"虚弱"，应取反变型联合尺度分布；对相对独立的两个概念，则应取独立型联合尺度分布。在 $A^c(x)=1-A(x)$ 的定义下，计算 $A\cup A^c$ 时，应取反变型，这样会有 $A\cup A^c=X$ 且 $A\cap A^c=\varnothing$ 的结果。

§3 集合套的落影

定义 3.3.1 设$([0, 1]^2, \mathscr{B}_0^2, p)$为概率空间，$p$为正变型联合尺度分布，$(\mathscr{P}(X), \Sigma^*)$为超可测结构，$H_1$，$H_2 \in \mathscr{H}(X)$，定义

$$\xi_{H_1}: [0, 1]^2 \to \mathscr{P}(X), \quad (\lambda, \mu) \mapsto H_1(\lambda) \qquad (3.3.1)$$

$$\xi_{H_2}: [0, 1]^2 \to \mathscr{P}(X), \quad (\lambda, \mu) \mapsto H_2(\mu) \qquad (3.3.2)$$

为随机集，称ξ_{H_1}和ξ_{H_2}分别为H_1和H_2的**扩展随机集套**.

定理 3.3.1 设ξ_H为集合套$H \in \mathscr{H}(X)$的扩展随机集套，则ξ_H的落影函数为

$$\mu_{\xi_H}(x) = T(H)(x) \qquad (3.3.3)$$

证明 由落影函数的定义

$$\mu_{\xi_H}(x) = p\{(\lambda, \mu) | x \in H(\lambda)\}$$

又因为对$\forall \lambda \in [0, 1]$，有

$$T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq T(H)_{\lambda}$$

所以

$$\{(\lambda,\mu) | x \in T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\} \subseteq \{(\lambda,\mu) | x \in H(\lambda)\} \subseteq \{(\lambda,\mu) | x \in T(H)_{\lambda}\}$$

而$\{(\lambda,\mu) | x \in T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\}$与$\{(\lambda,\mu) | x \in T(H)_{\lambda}\}$只差一个端点，由几何概率知

$$p\{(\lambda, \mu) | x \in T(H)_{\underset{\cdot}{\lambda}}\} = p\{(\lambda, \mu)) | x \in T(H)_{\lambda}\}$$

再由概率的单调性知 $\mu_{\xi_H}(x) = T(H)(x)$.

定理 3.3.2 设$([0, 1]^2, \mathscr{B}_0^2, p)$为概率空间，$p$为正变型联合尺度分布，$(\mathscr{P}(X), \Sigma^*)$为超可测空间，$H_1$、$H_2 \in \mathscr{H}(X)$，随机集$\xi_{H_1}$和$\xi_{H_2}$的定义如(3.3.1)和(3.3.2)，进一步定义

$$\xi_{H_1} \cup \xi_{H_2}: [0, 1]^2 \to \mathscr{P}(X), \quad (\lambda, \mu) \mapsto H_1(\lambda) \cup H_2(\mu)$$

$$\xi_{H_1} \cap \xi_{H_2}: [0, 1]^2 \to \mathscr{P}(X), \quad (\lambda, \mu) \mapsto H_2(\lambda) \cap H_2(\mu)$$

则

$$\mu_{\xi_{H_1} \cup \xi_{H_2}}(x) = \mu_{\xi_{H_1 \cup H_2}}(x) = \max(\mu_{\xi_{H_1}}(x), \mu_{\xi_{H_2}}(x))$$

$$=\max(T(H_1)(x),\ T(H_2)(x))=T(H_1\cup H_2)(x) \tag{3.3.4}$$

$$\mu_{\xi_{H_1}\cap\xi_{H_2}}(x)=\mu_{\xi_{H_1\cap H_2}}(x)=\min(\mu_{\xi_{H_1}}(x),\ \mu_{\xi_{H_2}}(x))$$

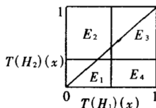
$$=\min(T(H_1)(x),\ T(H_2)(x))=T(H_1\cap H_2)(x) \tag{3.3.5}$$

证明 由表现定理与上述定理 3.3.1 立即可知

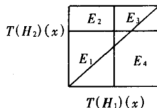
$$\mu_{\xi_{H_1\cup H_2}}(x)=T(H_1\cup H_2)(x)=(T(H_1)\cup T(H_2)(x)$$

$$=\max(T(H_1)(x),T(H_2)(x))=\max(\mu_{\xi_{H_1}}(x),\mu_{\xi_{H_2}}(x)).$$

往证 $\mu_{\xi_{H_1}\cup\xi_{H_2}}(x)=\max(\mu_{\xi_{H_1}}(x),\ \mu_{\xi_{H_2}}(x))$.



(a) $T(H_1)(x)\geqslant T(H_2)(x)$



(b) $T(H_1)(x)<T(H_2)(x)$

图 3.3.1

由于 $\mu_{\xi_{H_1}\cup\xi_{H_2}}(x)=p\{(\lambda,\ \mu)|x\in H_1(\lambda)\cup H_2(\mu)\}=p(\{(\lambda,\ \mu)|x\in H_1(\lambda)\}\cup\{(\lambda,\ \mu)|x\in H_2(\mu)\})$

又 $\{(\lambda,\ \mu)|x\in T(H_1)_{\dot\lambda}\}\subseteq\{(\lambda,\ \mu)|x\in H_1(\lambda)\}\subseteq\{(\lambda,\ \mu)|x\in T(H_1)_\lambda\}$

$\{(\lambda,\ \mu)|x\in T(H_2)_{\dot\mu}\}\subseteq\{(\lambda,\ \mu)|x\in H_2(\mu)\}\subseteq\{(\lambda,\ \mu)|x\in T(H_2)_\mu\}$

故 $\{(\lambda,\ \mu)|x\in T(H_1)_{\dot\lambda}\}\cup\{(\lambda,\ \mu)|x\in T(H_2)_{\dot\mu}\}\subseteq\{(\lambda,\ \mu)|x\in H_1(\lambda)\}\cup\{(\lambda,\ \mu)|x\in H_2(\mu)\}\subseteq\{(\lambda,\mu)|x\in T(H_1)_\lambda\}\cup\{(\lambda,\ \mu)|x\in T(H_2)_\mu\}$

$$\therefore\ \mu_{\xi_{H_1}\cup\xi_{H_2}}(x)=p(\{(\lambda,\ \mu)|x\in T(H_1)_\lambda\}\cup\{(\lambda,\ \mu)|x\in T(H_2)_\mu\})$$

$$=p(E_1\cup E_2\cup E_4)$$

仍分(a)、(b)两种情况有

$$\mu_{\xi_{H_1}\cup\xi_{H_2}}(x)=\max(\mu_{\xi_{H_1}}(x),\ \mu_{\xi_{H_2}}(x))$$

类似地可证(3.3.5)式.

上述两个定理说明，当 p 取正变型联合尺度分布的情况下，把一个Fuzzy集视为某个随机集的落影和视为某个集合套H的象 $T(H)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$是等效的.

§4 集值统计

一、Fuzzy统计

隶属度函数是Fuzzy数学的基石，如何确定它是一个重要问题. 张南纶等就“年青人”这一概念在年龄轴 X 上对隶属度进行了统计试验，发现这种覆盖频率具有很好的稳定性. 之后，马谋超等人提出了更精细的统计试验模型. 这些模型都是以求Fuzzy集的隶属度函数为目的的，故称为Fuzzy统计. 它是通过某个随机集的重复实现来确定其落影函数(即Fuzzy集的隶属度函数)的. 一般来讲，说集值统计显得更为广泛一些，其落影估计结果也未必解释为Fuzzy集. 集值统计的根本任务是对其落影进行估计与推断.

集值统计的每一个试验的结果是基本空间 X(样本空间为 $\mathscr{P}(X)$)的一个子集，这与传统的数理统计有着根本的差别. 传统的数理统计以估计某事件 A(X 的一个子集)的概率为目的，因此 A 确定(“圈圈固定”)而每个样本都是 X 中的一些点，它们相对于 A 来讲是因试验而变的(“点子在变”). 最终以样本中落入 A 的点的比率(频率)作为 A 的概率的估计值. 在集值统计中，为了确定 X 中某个定点x(“点子固定”)处的落影函数值，而每个样本是 X 的一些子集，它们相对于 x 来讲是因试验而变的(“圈圈在变”)，最终以样本中套住 x 的集合的比率(频率)作为 x 的落影函数值.

从严格意义讲，二者是一致的，我们只须把 x 视作$\mathscr{P}(X)$的某

个子集即可清楚这一点．实际上，只须令

$$\dot{x}=\{A|x\in A\subseteq X\}$$

即可将集值统计化为传统统计．

设 ξ: $\Omega\to\mathscr{P}(X)$ 为随机集（其中超可测结构为 $(\mathscr{P}(X),\Sigma^*)$），对 ξ 进行 n 次独立观测，获得样本

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n \tag{3.4.1}$$

每一个 $\xi_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都是随机集．我们定义

$$\bar{\xi}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x) \tag{3.4.2}$$

称之为 ξ 对 x 的覆盖频率．

定理 3.4.1（落影大数定理） 设随机集序列 $\{\xi_i\}_{n=1}^{\infty}$ 是独立同分布的且 $\mu_{\xi_i}(x)=\mu(x)$，则

$$\bar{\xi}_n(x,\ \omega)\to\ \mu(x)\qquad a\cdot e\cdot(n\to\infty) \tag{3.4.3}$$

证明 对任意 $x\in X$，记 $\xi_i(\omega)(x)=\xi_i^x(\omega)$，则 $\xi_i^x(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 为一组独立同分布的随机变量，且具有数学期望

$$E(\xi_i^x)=\int_\Omega \xi_i(\omega)(x)p(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{\{x\in\xi_i\}} p(\omega)\mathrm{d}\omega=p\{\omega|x\in\xi_i(\omega)\}=\mu(x)$$

由 Kolmogorov 大数定理知

$$\bar{\xi}_n(x)\to\ \mu(x)\qquad a\cdot e\cdot(n\to\infty).$$

定理 3.4.2 设 $(X,\ \Sigma)$ 为可测空间，m 为 Σ 上的正测度，ξ: $\Omega\to\mathscr{P}(X)$ 为随机集，记

$$\bar{m}(\xi)=\int_X \mu_\xi(x)\mathrm{d}m \tag{3.4.4}$$

则当 $\bar{m}(\xi)$ 为 Σ-可测时有

$$\bar{m}(\xi)=E(m(\xi(\omega))). \tag{3.4.5}$$

证明 利用 Fubini 定理

$$\overline{m}(\xi)=\int_X \mu_\xi(x)\mathrm{d}m=\int_X p\{x\in\xi\}\mathrm{d}m=\int_X\left(\int_\Omega \xi(\omega)(x)\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}m$$

$$=\int_X\left(\int_\Omega X(x,\ \omega)\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}m=\int_\Omega\left(\int_X X(x,\ \omega)\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_\Omega m(\xi(\omega))\mathrm{d}\omega=E(m(\xi)).$$

下列定理反映了随机集落影与随机变量分布之间的联系.

定理 3.4.3 设 $X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots\}$, $\sum=\mathscr{P}(X)$, $m(A)$ 表示 A 中元素的个数, ξ: $\Omega\to\mathscr{P}(X)\backslash\{\varnothing\}$ 为随机集,则 $\xi(\omega)$ 几乎处处为单点集的充要条件为 $\overline{m}(\xi)=1$; 此时,对 $\forall k$

$$\mu_\xi(x_k)=p\{\omega|\xi(\omega)=\{x_k\}\} \tag{3.4.6}$$

证明 记 $\Lambda=\{\omega|m(\xi(\omega))=1\}$. 由于 ξ 不取空集,故 $\Lambda^c=\{\omega\,|\,m(\xi(\omega))\geqslant 2\}$.

若 $\xi(\omega)$ 几乎处处为单点集,则 $p(\Lambda^c)=0$, 从而

$$\overline{m}(\xi)=\int_\Lambda m(\xi(\omega))\mathrm{d}\omega+\int_{\Lambda^c} m(\xi(\omega))\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_\Lambda m(\xi(\omega))\mathrm{d}\omega=p(\Lambda)=1$$

反之, 设 $\overline{m}(\xi)=1$. 假若 $p(\Lambda^c)>0$, 那么

$$\overline{m}(\xi)=\int_\Lambda m(\xi(\omega))\mathrm{d}\omega+\int_{\Lambda^c} m(\xi(\omega))\mathrm{d}\omega$$

$$\geqslant p(\Lambda)+2p(\Lambda^c)=1+p(\Lambda^c)>1$$

矛盾! 故知 $p(\Lambda^c)=0$, 即 $p(\Lambda)=1$, 亦即 $\overline{m}(\xi)=1$. 前部分证毕!

当 $p(\Lambda^c)=0$ 时,有

$$\mu_\xi(x_k)=p\{\omega|x_k\in\xi(\omega)\}=p\{\omega|\xi(\omega)=\{x_k\}\}+p(\Lambda^c\cap$$

$\{\omega | x_k \in \xi(\omega)\}) = p\{\omega | \xi(\omega) = \{x_k\}).$

参考文献

1 汪培庄．模糊集与随机集落影．北京：北京师范大学出版社，1985

2 张文修等．集值随机过程．北京：科学出版社，1995

3 汪培庄，张南纶．模糊落影空间．数学研究与评论，1982

4 汪培庄，李洪兴等．落影表现理论中的 Fuzzy 集运算．模糊系统与数学，1992; 2: 86—92

5 张南纶．语言中几个模糊概念的统计研究．人工智能学报，1982; 2: 27—42

6 罗承忠．模糊集与集合套．模糊数学，1983; 4: 113—126

7 罗承忠．可列集合套．模糊系统与数学，1991; 1: 1—6

8 张振良．集合套的落影函数．模糊系统与数学，1990; 2: 38—44

9 Goodman, I. R.. Fuzzy Sets as Equivalance Class of Random Sets, Recent Development in Fuzzy Set and Possibility Theory. Yager. R. I (ed), New York: Pergamen Press, 1982

10 Goodman, I. R. and Ngugen, H. T.. Uncertainty Models for Knowledge Based Systems. North-Holland, New York, 1985

11 马谋超，曹志强．类别判断的模糊集模型和多级估量法．心理学报，1983; 2: 198—204

第四章　软代数的表示定理

前面我们已经基本介绍了作为特殊的软代数系统的 Fuzzy 幂集系统 $(\mathscr{F}(X), \cup, \cap, {}^c)$ 的各种表现方法．现在，我们来研究一下一般的软代数系统的表示问题．

§1　几个基本概念

一、理　想

定义 4.1.1　设 $(L, \vee, \wedge)$ 为格，$\emptyset \neq A \subseteq L$，若 A 满足：

(1) $a, b \in A \Rightarrow a \vee b \in A$

(2) $a \in A$ 且 $x \leqslant a \Rightarrow x \in A$

则称 A 为 L 的一个理想．若 A 除 (1) 和 (2) 外还满足

(3) $a \wedge b \in A \Rightarrow a \in A$ 或 $b \in A$，则称 A 为 L 的一个素理想．

为方便起见，记 L 的全部理想所成之集为 $Id(L)$，全部素理想所成之集为 $Id_p(L)$．

定义 4.1.2　设 $(L, \vee, \wedge)$ 为格 $\emptyset \neq B \subseteq L$，若 B 满足

(1)　$a, b \in B \Rightarrow a \wedge b \in B$

(2)　$a \in B$ 且 $y \geqslant a \Rightarrow y \in B$

则称 B 为 L 的一个滤（或对偶理想）．若 B 除 (1) 和 (2) 外还满足

(3)　$a \vee b \in B \Rightarrow a \in B$ 或 $b \in B$

则称 B 为 L 的一个素滤（素对偶理想）．

我们记 L 的所有滤所成之集为 $Filt(L)$，所有素滤所成之集为 $Filt_p(L)$．

显然可知 L 本身既是 L 的理想又是滤，我们称之为平凡理想(或滤)．L 作为自己的理想和滤都不是素的．若 L 的一个理想(或滤)是非平凡的，则称之为真理想(或真滤)．

定理 4.1.1 设 $(L,\vee,\wedge)$ 为格，则下列命题为真：

(1) A 为 L 的理想当且仅当 A 满足

$a\vee b\in A \Longleftrightarrow a\in A$ 且 $b\in A$

(2) B 为 L 的滤当且仅当 B 满足

$a\wedge b\in B \Longleftrightarrow a\in B$ 且 $b\in A$

(3) A 为 L 的子格，那么 A 为 L 的理想当且仅当

$a\in A,\ b\in L\Rightarrow a\wedge b\in A$

(4) B 为 L 的子格，那么 B 为 L 的滤当且仅当

$a\in B,\ b\in L\Rightarrow a\vee b\in B$

(5) L 的任意多个理想(滤)之交仍为 L 的理想(滤)．

证明 (1)设 A 是理想．若 $a\vee b\in A$，则由于 $a\leqslant a\vee b$ 且 $b\leqslant a\vee b$，故 $a\in A$ 且 $b\in A$．反之若 $a\in A$ 且 $b\in A$，由定义4.1.1可知 $a\vee b\in A$．

设 A 满足性质

$a\vee b\in A \Longleftrightarrow a\in A$ 且 $b\in A$．

若 $a\in A$ 且 $x\leqslant a$，则 $a\vee x=a\in A$，于是 $x\in A$．因此，A 是理想．

(2) 仿(1)证．

(3) 设 A 为 L 的子格．若 A 为理想，$a\in A$，$b\in L$，由于 $a\wedge b\leqslant a$，故 $a\wedge b\in A$．反之，若 A 满足："$a\in A$ 且 $b\in L\Rightarrow a\wedge b\in A$"．那么对 $\forall\, x\leqslant a$，有 $x=x\wedge a\in A$．所以 A 为理想．

(4) 仿(3)证．

(5) 设 $A_t(t\in T)$为理想．若 $a,\ b\in\bigcap_{t\in T}A_t$，则对 $\forall\, t\in T$，$a,\ b\in A_t$．而 $A_t(t\in T)$ 为理想，所以 $a\vee b\in A_t(t\in T)$，从而 $a\vee b\in\bigcap_{t\in T}A_t$．若 $a\in\bigcap_{t\in T}A_t$ 且 $x\leqslant a$，则对一切 $t\in T$，$a\in A_t$．又 $A_t(t\in T)$ 为理

想，故 $x\in A_t(t\in T)$，从而 $x\in\bigcap_{t\in T}A_t$。

定义 4.1.3 设 $(L,\vee,\wedge,{}^c)$ 为软代数，$A\subseteq L$，称 $A^*=\{a^c|a\in A\}$ 为 A 的对偶集。

定理 4.1.2 设 $(L,\vee,\wedge,{}^c)$ 为软代数，则 A 为理想当且仅当 A^* 为滤。

证明 设 A 为理想。若 $a,b\in A^*$，则 $a^c,b^c\in A$，从而 $a^c\vee b^c=(a\wedge b)^c\in A$，故 $a\wedge b\in A^*$。若 $a\in A^*$ 且 $a\leqslant y$，由于 $y^c\leqslant a^c$ 且 $a^c\in A$，故 $y^c\in A$，从而 $y\in A^*$。因此，A^* 为滤。

设 A^* 为滤。若 $a,b\in A$，则 $a^c,b^c\in A^*$，从而 $a^c\wedge b^c=(a\vee b)^c\in A^*$，因而 $a\vee b\in A$。若 $a\in A$ 且 $x\leqslant a$，则 $a^c\in A^*$ 且 $a^c\leqslant x^c$，从而 $x^c\in A^*$，即 $x\in A$。所以 A 为理想。

定义 4.1.4 设 H 为格 L 的任意子集，称包含 H 的最小理想（最小滤）为由 H 生成的理想（滤），记为 $(H]$（相应地 $[H)$），特别当 $H=\{a\}(a\in L)$ 记为 $(a]$（$[a)$），并称之为主理想（主滤），记 L 的全体主理想所成之集为 L^*。

命题 4.1.1 H 生成的理想（滤）即为所有包含 H 的理想（滤）之交。

命题 4.1.2 $(a]=\{x|x\in L,\ x\leqslant a\}$，$[a)=\{x|x\in L,\ a\leqslant x\}$。

命题 4.1.3 A 为 L 的素理想当且仅当 A^c 为 L 的素滤。

证明 设 A 为 L 的素理想。若 $a,\ b\in A^c$，但 $a\wedge b\in A$，则由 A 为素理想知 $a\in A$ 或 $b\in A$，矛盾！因此

$$a,\ b\in A^c\Rightarrow a\wedge b\in A^c$$

若 $a\in A^c$，$a\leqslant y$ 但 $y\in A$，则有 $a\in A$，亦矛盾！

故 $$a\in A,\ a\leqslant y\Rightarrow y\in A^c$$

若 $a\vee b\in A^c$ 但 $a,\ b\in A$，则 $a\vee b\in A$，矛盾！所以

$$a\vee b\in A^c\Rightarrow a\in A^c \text{ 或 } b\in A^c$$

综上所述，A^c 为素滤。反之类证。

命题 4.1.4 设$(L,\vee,\wedge,^c)$，那么A为L的素理想当且仅当A^c为素滤。

证明 设A为素理想．若$a, b\in A^c$，则$a^c, b^c\in A$，从而$(a\wedge b)^c = a^c\vee b^c\in A$，即$a\wedge b\in A^c$。

若$a\in A^c$且$a\leqslant y$，则$a^c\in A$且$y^c\leqslant a^c$，从而$y^c\in A$，即$y\in A^c$。

若$a\vee b\in A^c$，则$(a\vee b)^c = a^c\wedge b^c\in A$，从而$a^c\in A$或$b^c\in A$，即$a\in A^c$或$b\in A^c$。

所以A^c为素滤．反之类证．

定义 4.1.5 设$(L,\vee,\wedge,^c)$为软代数，A为L的一个素理想且其满足

$$a\in A\Rightarrow a^c\notin A$$

则称A为L的一个**强素理想**．L的全部强素理想所成之集记为$Id_{pp}(L)$。

定义 4.1.6 设$(L,\vee,\wedge,^c)$为软代数，B为L的一个素滤且其满足

$$a\in B\Rightarrow a^c\notin B$$

则称B为L的一个**强素滤**．L的全部强素滤所成之集记为$Filt_{pp}(L)$.

我们有如下命题

命题 4.1.5 设$(L,\vee,\wedge,^c)$为软代数，则

(1) $A\in Id(L)$且$1\in A \Longleftrightarrow A=L$

(2) $B\in Filt(L)$且$0\in A \Longleftrightarrow B=L$

(3) 若$A\in Id_p(L)$，则$A\in Id_{pp}(L)$当且仅当$A\cap A^c=\varnothing$

(4) 若$B\in Filt_p(L)$，则$B\in Filt_{pp}(L)$当且仅当$B\cap B^c=\varnothing$

(5) $Id_{pp}(L)\cap Filt_{pp}(L)=\varnothing$

(6) $A\in Id_{pp}(L)\Rightarrow A^c\subseteq A^c$

(7) $B\in Filt_{pp}(L)\Rightarrow B^c\subseteq B^c$

证明 (1)～(4)显然成立．

(5)若 $A\in Id(L)\cap Filt(L)$，则 $A=L$．事实上，由 $A\in Id(L)$ 知 $0\in A$．又对 $\forall a\in L$，因 $a\geqslant 0$，且 A 为滤，故 $a\in A$．所以 $A=L$。由此可知 $Id(L)\cap Filt(L)=\{L\}$，又 $L\notin Id_{pp}(L)$，故 $Id_{pp}(L)\cap Filt_{pp}(L)=\varnothing$．

(6)设 $A\in Id_{pp}(L)$．若 $x\in A^{\varepsilon}$，则 $x^{c}\in A$．由于 $A\in Id_{pp}(L)$，故 $x\in A$，即 $x\in A^{c}$，从而 $A^{\varepsilon}\subseteq A^{c}$．

(7) 仿(6)证即可．

注 4.1.1：如 $L=[0,1]$，则 $[0,\dfrac{1}{3})$ 为强素理想，而 $[0,0.6)$ 为理想、素理想而非强素理想．

二、格和软代数的同态与同构、格表示

定义 4.1.7 设 $(L_1,\vee_1,\wedge_1)$ 和 $(L_2,\vee_2,\wedge_2)$ 为格，$\theta: L_1\to L_2$．若 θ 满足

(1) $\theta(a\vee_1 b)=\theta(a)\vee_2\theta(b)$

则称 θ 为 L_1 到 L_2 的并同态；

若 θ 满足

(2) $\theta(a\wedge_1 b)=\theta(a)\wedge_2\theta(b)$

则称 θ 为 L_1 到 L_2 的交同态；

若 θ 满足

(3) $a\leqslant b\Rightarrow\theta(a)\leqslant\theta(b)$

则称 θ 为 L_1 到 L_2 的序同态．

若 θ 满足(1)和(2)则称 θ 为 L_1 到 L_2 的格同态，或称 θ 为 L_1 在 L_2 中的一个同态表示．

若 θ 为 L_1 到 L_2 的格同态且是单满(即 1－1 对应)，则称 θ 为 L_1 到 L_2 的格同构，或称 θ 为 L_1 的按 L_2 的同构表示；若存在格同构 $\theta: L_1\to L_2$，则称 L_1 与 L_2 同构，记为 $L_1\cong L_2$．若 θ 为 L_1 到 L_2 的序同态且 θ 是单满的，则称 θ 为序同构．若存在序同构 θ:

$L_1 \to L_2$，则称 L_1 与 L_2 序同构.

定理 4.1.3 设 $(L_1, \vee_1, \wedge_1)$，$(L_2, \vee_2, \wedge_2)$ 为格，则

(1) 若 θ 为并同态，则 θ 为序同态；

(2) θ 是序同构 $\Longleftrightarrow \theta$ 是并同构 $\Longleftrightarrow \theta$ 是交同构 $\Longleftrightarrow \theta$ 是格同构.

证明 (1) 设 θ 为并同态且 $a \leqslant b$，由于 $a \vee b = b$，所以 $\theta(a \vee_1 b) = \theta(b)$，即 $\theta(a) \vee_2 \theta(b) = \theta(b)$，故 $\theta(a) \leqslant \theta(b)$.

(2)若 θ 为序同构. 由于 $a \leqslant a \vee_1 b$ 且 $b \leqslant a \vee_1 b$，故 $\theta(a) \leqslant \theta(a \vee_1 b)$ 且 $\theta(b) \leqslant \theta(a \vee_1 b)$. 从而 $\theta(a) \vee_2 \theta(b) \leqslant \theta(a \vee_1 b)$. 由于 θ 为单满射，故存在 c 使 $\theta(c) = \theta(a) \vee_2 \theta(b)$. 又 $\theta(a) \leqslant \theta(c)$ 且 $\theta(b) \leqslant \theta(c)$，故 $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c$ 从而 $a \vee_1 b \leqslant c$. 所以 $\theta(a \vee_1 b) \leqslant \theta(c)$. 综上所述知 $\theta(a \vee_1 b) = \theta(a) \vee_2 \theta(b)$，又 θ 为单满射，故 θ 为并同构.

若 θ 为并同构，则由 (1) 可知 θ 为序同构.

设 θ 为序同构. 由于 $a \wedge_1 b \leqslant a$ 且 $a \wedge_1 b \leqslant b$，故 $\theta(a \wedge_1 b) \leqslant \theta(a)$ 且 $\theta(a \wedge_1 b) \leqslant \theta(b)$，所以 $\theta(a \wedge_1 b) \leqslant \theta(a) \wedge_2 \theta(b)$. 另一方面，由于 θ 为单满射，故存在 c 使 $\theta(c) = \theta(a) \wedge_2 \theta(b)$，从而 $\theta(c) \leqslant \theta(a)$ 且 $\theta(c) \leqslant \theta(b)$. 有 $c \leqslant a$ 且 $c \leqslant b$，故 $c \leqslant a \wedge_1 b$，从而 $\theta(c) \leqslant \theta(a \wedge_1 b)$. 综合知，$\theta(a \wedge_1 b) = \theta(a) \wedge_2 \theta(b)$，即 θ 为交同态. 又 θ 为单满射，所以 θ 为交同构.

设 θ 为交同构. 因为当 $a \leqslant b$ 时，$a \wedge_1 b = a$ 即可有 $\theta(a \wedge_1 b) = \theta(a) \wedge_2 \theta(b) = \theta(a)$，从而 $\theta(a) \leqslant \theta(b)$，即 θ 为序同构.

综上所述，立即得 θ 为序同构 $\Longleftrightarrow \theta$ 为格同构.

定理 4.1.4 若 $(L_1, \vee_1, \wedge_1, ^{c_1})$ 和 $(L_2, \vee_2, \wedge_2, ^{c_2})$ 为软代数，θ: $L_1 \to L_2$ 满足

$$\theta(a^{c_1}) = (\theta(a))^{c_2}$$

则 θ 为并同态当且仅当 θ 为交同态.

证明 设 $a, b \in L_1$ 且 θ 为并同态，则

$$\theta(a \wedge b) = \theta((a^{c_1})^{c_1} \wedge (b^{c_1})^{c_1}) = \theta((a^{c_1} \vee b^{c_1})^{c_1})$$

$=[\theta(a^{c_1}\vee b^{c_1})]^{c_2}=((\theta(a))^{c_2}\vee(\theta(b))^{c_2})^{c_2}$

$=((\theta(a)\wedge\theta(b))^{c_2})^{c_2}=\theta(a)\wedge\theta(b)$

所以 θ 为交同态．类似可证，当 θ 为交同态时必为并同态．

为此，我们定义

定义 4.1.8 设 $(L_1,\vee_1,\wedge_1,{}^{c_1})$ 和 $(L_2,\vee_2,\wedge_2,{}^{c_2})$ 为软代数，θ: $L_1\to L_2$，若 θ 满足

(1) $\theta(a\vee_1 b)=\theta(a)\vee_2\theta(b)$

(2) $\theta(a^{c_1})=[\theta(a)]^{c_2}$

则称 θ 为 L_1 到 L_2 的软代数同态；若 θ 为单同态，则称 θ 为嵌入映射；若 θ 为软代数同态且为单满射，则称 θ 为 L_1 与 L_2 之间的软代数同构；若 L_1 与 L_2 之间存在软代数同构，则称 L_1 与 L_2 同构，记为 $L_1\cong L_2$.

定义 4.1.9 设 $(L,\vee,\wedge)$ 为格，在 $Id(L)$ 中定义

$\vee^*$: $A\vee^*B=(A\cup B]$

$\wedge^*$: $A\wedge^*B=(A\cap B]$

在 $Filt(L)$ 中定义

$\vee_*$: $A\vee_*B=[A\cup B)$

$\wedge_*$: $A\wedge_*B=[A\cap B)$

定理 4.1.5 $(L,\vee,\wedge)$ 为格，则 $(Id(L),\vee^*,\wedge^*)$ 及 $(Filt(L),\vee_*,\wedge_*)$ 均为完全格．

定理显然成立．

定理 4.1.6 设 $(L,\vee,\wedge)$ 为分配格，$A,B\in Id(L)$，则

$A\vee^*B=\{a\vee b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$

$A\wedge^*B=\{a\wedge b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$.

证明 先证第一个等式．设 $W=\{x\,|\,x\leqslant a\vee b$ 对某个 $a\in A$, $b\in B\}$．显然 $A\cup B\subseteq W$．如果 $x\vee y\in W$，则存在 $a\in A$, $b\in B$ 使 $x\vee y\leqslant a\vee b$，从而存在 $a\in A$, $b\in B$ 使 $x\leqslant x\vee y\leqslant a\vee b$, $y\leqslant x\vee y\leqslant a\vee b$，即 $x\in W$ 且 $y\in W$．反之，若 $x\in W$ 且 $y\in W$，则存

在 a', b', a'', b'' 使 $x\leqslant a'\vee b'$, $y\leqslant a''\vee b''$, 从而 $x\vee y\leqslant(a'\vee b')\vee(a''\vee b'')=(a'\vee a'')\vee(b'\vee b'')$ 且 $a'\vee a''\in A$, $b'\vee b''\in B$, 所以 $x\vee y\in W$. 由定理 4.1.1 知 W 为理想. 因此

$$A\vee^* B=(A\cup B]\subseteq W.$$

又设 I 为 L 的理想且 $A\cup B\subseteq I$, 则易见 $W\subseteq I$. 故 $(A\cup B]=W$.

显然 $\{a\vee b|a\in A,\ b\in B\}\subseteq W$. 另一方面, 若 $x\in W$, 则存在 $a\in A$, $b\in B$ 使 $x\leqslant a\vee b$. 又 L 为分配格, 故

$$x=x\wedge(a\vee b)=(x\wedge a)\vee(x\wedge b)$$

而 $a'=x\wedge a\in A$ ($\because$ $x\wedge a\leqslant a$) 且 $b'=x\wedge b\in B$, 即存在 $a'\in A$, $b'\in B$ 使 $x=a'\vee b'$. 所以 $x\in\{a\vee b|a\in A,\ b\in B\}$. 即

$$W\subseteq\{a\vee b|a\in A,\ b\in B\}$$

因此, $A\vee^* B=(A\cup B]=\{a\vee b|a\in A,\ b\in B\}$.

往证第二式. 显然, $A\wedge^* B=A\cap B$. 若 $x\in A\cap B$, 则 $x\in A$ 且 $x\in B$, 又 $x=x\wedge x$, 故 $x\in\{a\wedge b|a\in A,\ b\in B\}$. 反之, 若 $x\in\{a\wedge b|a\in A,\ b\in B\}$, 则存在 $a\in A$、$b\in B$ 使 $x=a\wedge b$. 故 $x\leqslant a$ 且 $x\leqslant b$, 即 $x\in A$ 且 $x\in B$. 所以 $\{a\wedge b|a\in A,\ b\in B\}\subseteq A\cap B$. 故

$$A\wedge^* B=(A\cap B]=A\cap B=\{a\wedge b|\ a\in A,\ b\in B\}$$

定理 4.1.7 设 $(L,\vee,\wedge)$ 为分配格, 则

$$(a]\vee^*(b]=(a\vee b],\ (a]\wedge^*(b]=(a\wedge b]$$

证明 由于 $(a]\vee^*(b]$ 为理想, 且 $a\in(a]\vee^*(b]$, $b\in(a]\vee^*(b]$, 故 $a\vee b\in(a]\vee^*(b]$, 从而 $(a\vee b]\subseteq(a]\vee^*(b]$. 反之, 若 $x\in(a]\vee^*(b]$, 则 $x\leqslant c\vee d$ 且 $c\in(a]$, $d\in(b]$, 故 $x\leqslant c\vee d\leqslant a\vee b$. 所以 $x\in(a\vee b]$. 即 $(a]\vee^*(b]\subseteq(a\vee b]$.

综上所述, $(a]\vee^*(b]=(a\vee b]^*$.

第二式仿证.

由定理 4.1.7 可知

推论 4.1.1 $(L^*,\vee^*,\wedge^*)$ 为 $(Id(L),\vee^*,\wedge^*)$ 的子格.

推论 4.1.2 $\varphi: L\to L^*$, $a\mapsto(a]$ 为格同构.

有时,我们称 $(Id(L),\vee^*,\wedge^*)$ 为 $(L,\vee,\wedge)$ 的理想格, $(L^*,\vee^*,\wedge^*)$ 为 $(L,\vee,\wedge)$ 的主理想格.

定理 4.1.7 并不意味着 L 可表示为其幂集格的子格,这是因为一般

$$(a]\vee^*(b]\neq(a]\cup(b].$$

定理 4.1.8 设 $\theta: L_1\to L_2$ 为格满同态且 L_2 有泛界 0, 1, 则

(1) θ 的核 $\mathrm{Ker}\theta=\{x\mid\theta(x)=0\}$ 为 L_1 的理想;

(2) θ 的对偶核 $\mathrm{D\text{-}Ker}\theta=\{x\mid\theta(x)=1\}$ 为 L_1 的滤;

(3) 若 A 为 L_1 的子格(理想或滤)则 $\theta(A)$ 为 L_2 的子格(理想或滤).

证明 (1) 由于 θ 为满射, 故 $\mathrm{Ker}\,\theta\neq\varnothing$, $\mathrm{D\ Ker}\theta\neq\varnothing$, 且 $\mathrm{Ker}\theta\neq L$, $\mathrm{D\text{-}Ker}\theta\neq L$, 故 $\mathrm{Ker}\theta$ 和 $\mathrm{D\text{-}Ker}\theta$ 为 L 的真子集.

若 a, $b\in\mathrm{Ker}\theta$, 则 $\theta(a)=\theta(b)=0$, 故

$$\theta(a\vee b)=\theta(a)\vee\theta(b)=0\vee0=0$$

$\therefore$ $a\vee b\in\mathrm{Ker}\theta$.

若 $a\in\mathrm{Ker}\theta$ 且 $x\leqslant a$, 由于 θ 为格同态, 故为序同态, 故 $\theta(x)\leqslant\theta(a)=0$, 从而 $\theta(x)=0$, 即 $x\in\mathrm{Ker}\theta$.

所以 $\mathrm{Ker}\theta$ 为真理想.

仿此可证 $\mathrm{D\text{-}Ker}\theta$ 为真滤(即(2)).

(3)是显然的.

定理 4.1.9 设 $\theta: L_1\to L_2$ 为格满同态且 $L_2=\{0, 1\}$, 则 $\mathrm{Ker}\,\theta$ 为 L_1 的素理想, $\mathrm{D\text{-}Ker}\theta$ 为 L_1 的素滤.

证明 显然, $\mathrm{Ker}\theta=(\mathrm{D\text{-}Ker}\theta)^c$.

若 $a\wedge b\in\mathrm{Ker}\theta$, 则 $\theta(a\wedge b)=\theta(a)\wedge\theta(b)=0$. 倘若 $\theta(a)\neq0$ 且 $\theta(b)\neq0$, 则 $a\in\mathrm{D\text{-}Ker}\theta$ 且 $b\in\mathrm{D\text{-}Ker}\theta$, 又 $\theta(a\wedge b)=\theta(a)\wedge\theta(b)=1\wedge1=1$. 矛盾! 故 $a\in\mathrm{Ker}\theta$ 或 $b\in\mathrm{Ker}\theta$. 即 $\mathrm{Ker}\theta$ 为素理想. 由命题 4.1.3 知, $\mathrm{D\text{-}Ker}\theta$ 为素滤.

§2 集对 Fuzzy 格

定义 4.2.1 设 X 为非空集，若 $f: X \to X$ 满足 $f(f(x))=x$，则称 f 为 X 上的**复原映射(或对合映射)**.

例 4.2.1 X 为非空集，则 $I: X \to X, x \mapsto x$ 为复原映射.

例 4.2.2 设 X 为非空集，则 ^{c}: $\mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$，$A \mapsto A^c$ 为 $\mathscr{P}(X)$ 上的复原映射.

例 4.2.3 设 L 为 Fuzzy 格，则其上的逆序对合对应为 L 上的复原映射.

命题 4.2.1 复原映射为双射.

证明 设 $f: X \to X$ 为复原映射且 $x_1 \neq x_2$。假若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(f(x_1))=f(f(x_2))$，即 $x_1=x_2$，矛盾！所以 $f(x_1)\neq f(x_2)$，即 f 为单射．又对任意 $x\in X$，由于 $f(f(x))=x$，故 x 为 $f(x)$ 的象，即 f 为满射.

定义 4.2.2 设 X 为非空集，f 为 X 上的复原映射，$A\subseteq X$，称 $f(A)=\{f(x)|x\in A\}$ 为 A 的 **f- 对偶集**.

命题 4.2.2 设 X 为非空集，f 为 X 上的复原映射，那么 f- 对偶集有如下性质:

(1) $f(f(A))=A$

(2) $f(\bigcup\limits_{t\in T} A_t)=\bigcup\limits_{t\in T} f(A_t)$ $\quad f(\bigcap\limits_{t\in T} A_t)=\bigcap\limits_{t\in T} f(A_t)$

(3) $A\subseteq B \Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$

定理 4.2.1 设 X 为非空集，f 为其上的复原映射，$\mathscr{D}(X) = \mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)$ 对下列运算 $\oplus$, $\odot$, ^{c_f}:

$\oplus$: $(A', A'')\oplus(B', B'')=(A'\cup B', A''\cap B'')$

$\odot$: $(A', A'')\odot(B', B'')=(A'\cap B', A''\cup B'')$

^{c_f}: $(A', B'')^{c_f}=(f(A''), f(A'))$

构成 Fuzzy 格。

证明 因为($\mathscr{P}(X)$, $\cup$, $\cap$)为完全分配格，故($\mathscr{D}(X)$, $\oplus$, $\odot$)为完全分配格。

往证：$(A', A'')\leqslant(B', B'')$ 当且仅当 $A'\subseteq B'$ 且 $A''\supseteq B''$.

设 $(A', A'')\leqslant(B', B'')$, 则 $(A', A'')\oplus(B', B'')=(B', B'')$, 即 $(A'\cup B', A''\cap B'')=(B', B'')$, 亦即 $A'\cup B'=B'$ 且 $A''\cap B''=B''$. 所以 $A'\subseteq B'$ 且 $A''\supseteq B''$.

反之，若 $A'\subseteq B'$ 且 $A''\supseteq B''$, 则 $(A', A'')\oplus(B', B'')=(A'\cup B', A''\cap B'')=(B', B'')$. 所以 $(A', A'')\leqslant(B', B'')$.

“^{c_f}”的对合性(即复原律)。设 $(A', A'')\in\mathscr{D}(X)$，则 $((A', A'')^{c_f})^{c_f}=(f(A''), f(A'))^{c_f}=(f(f(A')), f(f(A'')))=(A', A'')$.

“^{c_f}”的逆序性．设 $(A', A'')\leqslant(B', B'')$, 则 $A'\subseteq B'$ 且 $A''\supseteq B''$. 又 $(A', A'')^{c_f}=(f(A''), f(A'))$, $(B', B'')^{c_f}=(f(B''), f(B'))$, 按命题 4.2.2 之(3)有 $f(A')\subseteq f(B')$ 且 $f(A'')\supseteq f(B'')$, 故有 $(f(A''), f(A'))\geqslant(f(B''), f(B'))$, 即 $(B', B'')^{c_f}\leqslant(A', A'')^{c_f}$.

综上所述($\mathscr{D}(X)$, $\oplus$, $\odot$, ^{c_f})为 Fuzz y 格。

推论 4.2.1 设 X 为非空集，则 $\mathscr{D}(X)$ 对 $\oplus$, $\odot$ 及下述 ^{c}:

$$(A', A'')^c=(A'', A')$$

构成 Fuzzy 格。

证明 由于 I: $X\to X$, $x\mapsto x$ 为复原映射，而 $(A', A'')^c=(A'', A')=(I(A''), I(A'))$, 按定理 4.2.1 知($\mathscr{D}(X)$, $\oplus$, $\odot$, ^{c})为 Fuzzy 格。

以后称($\mathscr{D}(X)$, $\oplus$, $\odot$, ^{c})为 X 的集对 Fuzzy 格，($\mathscr{D}(X)$, $\oplus$, $\odot$, ^{c_f})为 X 的 f-集对 Fuzzy 格。

推论 4.2.2 设(L, $\vee$, $\wedge$, ^{c})为一软代数，则($\mathscr{D}(L)$, $\oplus$, $\odot$)对“^{c*}”

$$(A', A'')^{c*}=((A'')^c, (A')^c)$$

形成 Fuzzy 格。

其中 $A^c=\{x|x^c\in A\}$.

定理 4.2.2 $(YN(X),\oplus,\odot,^c)$为$(\mathscr{D}(X),\oplus,\odot,^c)$的子 Fuzzy 格.

证明 设$(A'_t, A''_t)\in YN(X)(t\in T)$, 则$A'_t\cap A''_t=\varnothing(t\in T)$, 故

$$(\bigcup_{t\in T}A'_t)\cap(\bigcap_{t\in T}A''_t)=\bigcap_{t\in T}(\bigcup_{t\in T}A'_t\cap A''_t)=\bigcap_{t_1\in T}\bigcup_{t_2\in T}(A'_{t_1}\cap A''_{t_2})$$

$$\subseteq\bigcup_{t_2\in T}(A'_{t_2}\cap A''_{t_2})=\varnothing.$$

同理$(\bigcap_{t\in T}A'_t)\cap(\bigcup_{t\in T}A''_t)=\varnothing$. 所以,

$\underset{t\in T}{\oplus}(A'_t, A''_t)$, $\underset{t\in T}{\odot}(A'_t, A''_t)\in YN(X)$, 即 $YN(X)$完备. 又 $(A', A'')\in YN(X)$, 则 $A'\cap A''=\varnothing$. 又$(A', A'')^c=(A'', A')$, 故$(A', A'')^c\in YN(X)$.

定理 4.2.3 $(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,^c)$可以嵌入到$(\mathscr{D}(X),\oplus,\odot,^c)$中.

证明 只须作映射 φ: $\mathscr{P}(X)\to\mathscr{D}(X)$, $A\mapsto(A, A^c)$. 显然 φ 为单射. 又

$$\begin{aligned}\varphi(A\cup B)&=(A\cup B, (A\cup B)^c)=(A\cup B, A^c\cap B^c)\\&=(A, A^c)\oplus(B, B^c)=\varphi(A)\oplus\varphi(B)\\\varphi(A\cap B)&=(A\cap B, (A\cap B)^c)=(A\cap B, A^c\cup B^c)\\&=(A, A^c)\odot(B, B^c)=\varphi(A)\odot\varphi(B)\end{aligned}$$

$$\varphi(A^c)=(A^c, (A^c)^c)=(A^c, A)=(A, A^c)^c=(\varphi(A))^c$$

所以 φ 为同态. 故 φ 为嵌入映射.

§3 分配格基本定理

定义 4.3.1 设$(L,\vee,\wedge)$为格, θ为 L 上的等价关系(即有分类"$\equiv(\theta)$"), 若当 $a\equiv a_1$ 且 $b\equiv b_1(\theta)$时, 总有

$$a\wedge b\equiv a_1\wedge b_1(\theta)\text{ 且 } a\vee b\equiv a_1\vee b_1(\theta)$$

则称 θ 为 L 上的合同.

显然,若 φ 为格 L 到 L' 的同态映射,且定义

$$a \equiv b(\theta) \Longleftrightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$$

则得 L_1 上的合同 θ. 反之,对 L 上某合同 θ, 取 $L'=L/\theta=\{[a]|a\in L\}$ (其中$[a]$表示 a 所在的类, $[a]=\{x|x\equiv a(\theta)\}$), 且在 L' 中, 定义

$$[a] \vee^* [b]=[a\vee b]$$

$$[a] \wedge^* [b]=[a\wedge b]$$

则$(L', \vee^*, \wedge^*)$为格,且当 L 为分配格时 L' 也为分配格, 此时 f_θ: $L\to L'$, $a\mapsto[a]$即为 L 到 L' 的同态映射.

记格 L 上的全体合同所成之集为Θ, 在Θ定义

$$\theta_1\leqslant\theta_2 \Longleftrightarrow \text{当 } a\equiv b(\theta_2) \text{ 时 } a\equiv b(\theta_1)$$

则$(\Theta, \leqslant)$为偏序集. 对Θ的某个子集 Φ, 定义 $\vee\Phi$ 如

$$a\equiv b(\vee\Phi) \Longleftrightarrow \forall\,\theta\in\Phi \text{ 有 } a\equiv b(\theta)$$

则 $\vee\Phi$ 为 L 的合同, 称之为 Φ 的上确界. 又定义 $\wedge\Phi$ 如

$a\equiv b(\wedge\Phi) \Longleftrightarrow$存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n\in L$ 及 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n+1}\in\Phi$ 使 $a\equiv c_1(\theta_1)$, $c_1\equiv c_2(\theta_2)$, $\cdots$, $c_{n-1}\equiv c_n(\theta_n)$, $c_n\equiv b(\theta_{n+1})$

则 $\wedge\Phi$ 亦为 L 的合同[1], 称之为 Φ 的下确界.

命题 4.3.1 $(\Theta,\vee,\wedge)$为分配格.

证明 首先, $(\Theta,\vee,\wedge)$为格, 故可由格的分配包含式, 有

$$(\theta_1\wedge\theta_2)\vee\theta_3\leqslant(\theta_1\vee\theta_3)\wedge(\theta_2\vee\theta_3)$$

今证反向包含式. 设有 $a, b\in L$ 满足 $a<b$ 且 $a\equiv b((\theta_1\wedge\theta_2)\vee\theta_3)$, 则 $a\equiv b(\theta_3)$ 且存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n\in L$ 使 $a\equiv c_1(\theta_1)$, $c_1\equiv c_2(\theta_2)$, $c_2\equiv c_3(\theta_1)$, $\cdots$, $c_{n-1}\equiv c_n(\theta_1)$, $c_n\equiv b(\theta_2)$.

取 φ: $L\to L$, $x\mapsto\varphi(x)=(x\wedge b)\vee a$, 则 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$ 且当 $x\equiv y(\theta)$ 时 $\varphi(x)\equiv\varphi(y)(\theta)$. 不妨设 $a\leqslant c_i\leqslant b\,(i=1, 2, \cdots, n)$, 那么按 θ_3, 有 $c_i\equiv a$ 且 $c_i\equiv b$, 从而 $c_1\equiv a(\theta_1\vee\theta_3)$, $c_2\equiv c_1(\theta_2\vee\theta_3)$, $\cdots$, $c_{n-1}\equiv c_n(\theta\vee\theta_3)$, $c_n\equiv b(\theta_2\vee\theta_3)$, 即

$$a \equiv b((\theta_1 \vee \theta_3) \wedge (\theta_2 \vee \theta_3))$$

所以 $(\theta_1 \vee \theta_3) \wedge (\theta_2 \vee \theta_3) \leqslant (\theta_1 \wedge \theta_2) \vee \theta_3$，故

$$(\theta_1 \wedge \theta_2) \vee \theta_3 = (\theta_1 \vee \theta_3) \wedge (\theta_1 \vee \theta_3)$$

对偶地 $(\theta_1 \vee \theta_2) \wedge \theta_3 = (\theta_1 \wedge \theta_3) \vee (\theta_1 \wedge \theta_3)$.

以后称 $(\Theta, \vee, \wedge)$ 为 L 的合同格．若 $\theta \in \Theta$ 使 $\forall a, b \in L$ 有 $a \equiv b(\theta)$，则称 θ 为零合同．

引理 4.3.1 (Zorn 引理) 任意偏序集里至少有一个极大的全序子集．

引理 4.3.2 设 $\theta \in \Theta$，其中 L 为有 0，1 的格，则 θ 为非零合同当且仅当 $0 \not\equiv 1(\theta)$．

命题 4.3.2 设 $(L, \vee, \wedge)$ 为有泛界 0，1 的格，则必存在 L 上的非零合同．

证明 因为 $0 \neq 1$，而 $I: L \to L, x \mapsto x$ 为 L 上的非零合同．

定理 4.3.1 设 $(L, \vee, \wedge)$ 为有泛界 0，1 的格，则存在 L 上的非零极小合同 θ^* 使 $L/\theta^* = \{[0], [1]\}$．

证明 设 Φ 为 L 上所有非零合同所成之集，按 Zorn 引理 Φ 有极大的全序子集 Φ'．令 $\theta^* = \wedge \Phi'$．往证 θ^* 为 Φ 的极小合同．假若存在非零合同 θ' 使 $\theta' < \theta^*$，则 $\{\theta'\} \cup \Phi'$ 仍为全序子集，这与 Φ' 的极大性矛盾！因此，θ^* 为 Φ 的极小合同．所以 $\theta^* \in \Phi$，即 θ^* 为非零合同．由 θ^* 的极小性知 $L/\theta^* = \{[0], [1]\}$．

推论 4.3.1 设 L 为有 0，$1 (0 \neq 1)$ 的分配格，则一定存在 L 到二元格 $L_2 = \{0, 1\}$ 的一个满同态．

定理 4.3.2 设 L 为非平凡的分配格，则对 $a, b \in L$ 且 $a < b$ 必存在素理想 A 使 $a \in A$ 但 $b \notin A$．

证明 由于 L 为分配格，易证 $\varphi: x \mapsto (x \vee a) \wedge b$ 为 L 到 $[a, b]$ 的满同态（$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$），又 $[a, b]$ 为有泛界的格，故存在 $[a, b]$ 到二元格 $B = \{0, 1\}$ 的满同态 ψ．令 $\theta = \psi \cdot \varphi$，则 θ 为 L 到 B 的满同态，由定理 4.1.9 知，$A = \mathrm{Ker}\theta$ 为 L 的素理想并且 $a \in A$ 但

$b \notin A$。

推论 4.3.2 任何非平凡格都可以满同态映射到二元格上.

定理 4.3.3(分配格基本定理) 设 L 是任意格，则 L 是分配格当且仅当存在 L 按某个集格的同构表示.

证明 充分性显然. 下证必要性. 定义映射 $\varphi: L \to \mathscr{P}(Filt_p(L))$, $a \mapsto \{P \mid P \in Filt_p(L) \text{ 且 } a \in P\}$, 若 a, $b \in L$, 则

当 $A \in \varphi(a \vee b)$ 时, $a \vee b \in A$, 又 A 为素滤, 故有 $a \in A$ 或 $b \in A$, 即 $A \in \varphi(a)$ 或 $A \in \varphi(b)$, 亦即 $A \in \varphi(a) \cup \varphi(b)$. 所以 $\varphi(a \vee b) \subseteq \varphi(a) \cup \varphi(b)$.

反之, 若 $A \in \varphi(a) \cup \varphi(b)$, 则由于 $a \leqslant a \vee b$, $b \leqslant a \vee b$ 且 A 为滤, 知 $a \vee b \in A$, 即 $A \in \varphi(a \vee b)$, 所以 $\varphi(a) \cup \varphi(b) \subseteq \varphi(a \vee b)$。故

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b) \tag{4.3.1}$$

当 $A \in \varphi(a \wedge b)$ 时, $a \wedge b \in A$, 又 $a \wedge b \leqslant a$, $a \wedge b \leqslant b$ 且 A 为滤, 故 $a \in A$ 且 $b \in A$, 即 $A \in \varphi(a)$ 且 $A \in \varphi(b)$, 亦即 $A \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$, 所以 $\varphi(a \wedge b) \subseteq \varphi(a) \cap \varphi(b)$.

反之, 若 $A \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$, 则 $a \in A$ 且 $b \in A$, 又 A 为滤, 故 $a \wedge b \in A$, 即 $A \in \varphi(a \wedge b)$, 所以 $\varphi(a) \cap \varphi(b) \subseteq \varphi(a \wedge b)$. 故

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b) \tag{4.3.2}$$

由此可知 φ 为同态.

又若 $a \neq b$, 则 $a \wedge b < a \vee b$, 由定理 4.3.2 知存在 $A \in Id_p(L)$ 使 $a \wedge b \in A$ 但 $a \vee b \notin A$. 易证 $A^c \in Filt_p(L)$. 故存在 $A^c \in Filt_p(L)$ 使 $a \wedge b \notin A^c$ 且 $a \vee b \in A^c$. 所以 $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ (否则会有 $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a \vee b) = \varphi(a) = \varphi(b)$). 所以, φ 为单射.

又由定理 4.1.8 知 $\varphi(L)$ 为 $\mathscr{P}(Filt_p(L))$ 的子格, 从而

$$\varphi: L \to \varphi(L)$$

为同构而 $(\varphi(L), \cup, \cap)$ 为集格.

§4 软代数表示定理

定理 4.4.1 $(L,\vee,\wedge)$ 为格，${}^c: L\to L$，则 $(L,\vee,\wedge,{}^c)$ 为软代数当且仅当它与某个集对 Fuzzy 格的子格同构。

证明 充分性是显然的。

必要性。设 $(L,\vee,\wedge,{}^c)$ 为软代数，定义 $\varphi: L\to \mathscr{D}(Filt_p(L))$，$a\mapsto\varphi(a)=(\mathscr{A}_a,\mathscr{B}_a)$，其中 $\mathscr{A}_a=\{A\in Filt_p(L)\mid a\in A\}$，$\mathscr{B}_a=\{A\in Filt_p(L)\mid a^c\in A\}$

对 $\forall a,b\in L$，设 $A\in\mathscr{A}_{(a\vee b)}$，则 $a\vee b\in A$，由于 A 为素滤，故 $a\in A$ 或 $b\in A$，从而 $A\in\mathscr{A}_a$ 或 $A\in\mathscr{A}_b$。故 $\mathscr{A}_{(a\vee b)}\subseteq\mathscr{A}_a\cup\mathscr{A}_b$。设 $A\in\mathscr{A}_a\cup\mathscr{A}_b$，则 $a\in A$ 或 $b\in A$，由于 $a\leqslant a\vee b$ ($b\leqslant a\vee b$) 且 A 为素滤，故 $a\vee b\in A$，即 $A\in\mathscr{A}_{(a\vee b)}$。所以 $\mathscr{A}_a\cup\mathscr{A}_b\subseteq\mathscr{A}_{(a\vee b)}$。从而 $\mathscr{A}_{(a\vee b)}=\mathscr{A}_a\cup\mathscr{A}_b$。

又设 $B\in\mathscr{B}_{(a\vee b)}$，则 $(a\vee b)^c=a^c\wedge b^c\in B$。由于 $a^c\wedge b^c\leqslant a^c$ 且 $a^c\wedge b^c\leqslant b^c$ 又 B 为素滤，故 $a^c\in B$ 且 $b^c\in B$，即 $B\in\mathscr{B}_a$ 且 $B\in\mathscr{B}_b$，亦即 $B\in\mathscr{B}_a\cap\mathscr{B}_b$。从而 $\mathscr{B}_{(a\vee b)}\subseteq\mathscr{B}_a\cap\mathscr{B}_b$。又若 $B\in\mathscr{B}_a\cap\mathscr{B}_b$，则 $a^c\in B$ 且 $b^c\in B$。由于 B 为素滤，故 $a^c\wedge b^c\in B$，即 $(a\vee b)^c\in B$，即 $B\in\mathscr{B}_{(a\vee b)}$。所以 $\mathscr{B}_a\cap\mathscr{B}_b\subseteq\mathscr{B}_{(a\vee b)}$。从而 $\mathscr{B}_{(a\vee b)}=\mathscr{B}_a\cap\mathscr{B}_b$。

综述得

$$\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\oplus\varphi(b) \tag{4.4.1}$$

若 $A\in\mathscr{A}_{(a\wedge b)}$，则 $a\wedge b\in A$。由于 $a\wedge b\leqslant a$ 且 $a\wedge b\leqslant b$，故 $a\in A$ 且 $b\in A$，即 $A\in\mathscr{A}_a$ 且 $A\in\mathscr{A}_b$，亦即 $A\in\mathscr{A}_a\cap\mathscr{A}_b$，从而 $\mathscr{A}_{(a\wedge b)}\subseteq\mathscr{A}_a\cap\mathscr{A}_b$。反之，若 $A\in\mathscr{A}_a\cap\mathscr{A}_b$，则 $A\in\mathscr{A}_a$ 且 $A\in\mathscr{A}_b$，即 $a\in A$ 且 $b\in A$。因为 A 为素滤，故 $a\wedge b\in A$，从而 $A\in\mathscr{A}_{(a\wedge b)}$，即 $\mathscr{A}_a\cap\mathscr{A}_b\subseteq\mathscr{A}_{(a\wedge b)}$。所以 $\mathscr{A}_{(a\wedge b)}=\mathscr{A}_a\cap\mathscr{A}_b$。

设 $B \in \mathscr{B}_{(a\wedge b)}$，则 $(a\wedge b)^c = a^c \vee b^c \in B$. 由于 B 为素滤，故 $a^c \in B$ 或 $b^c \in B$，即 $B \in \mathscr{B}_a$ 或 $B \in \mathscr{B}_b$，即 $B \in \mathscr{B}_a \cup \mathscr{B}_b$. 从而 $\mathscr{B}_{(a\wedge b)} \subseteq \mathscr{B}_a \cup \mathscr{B}_b$. 反之，若 $B \in \mathscr{B}_a \cup \mathscr{B}_b$，则 $B \in \mathscr{B}_a$ 或 $B \in \mathscr{B}_b$，即 $a^c \in B$ 或 $b^c \in B$. 由于 $a^c \leqslant a^c \vee b^c$ 且 $b^c \leqslant a^c \vee b^c$，故 $a^c \vee b^c \in B$，即 $B \in \mathscr{B}_{(a\wedge b)}$，从而 $\mathscr{B}_a \cup \mathscr{B}_b \subseteq \mathscr{B}_{(a\wedge b)}$. 所以 $\mathscr{B}_{(a\wedge b)} = \mathscr{B}_a \cup \mathscr{B}_b$. 由此可知

$$\varphi(a\wedge b)=\varphi(a) \odot \varphi(b) \tag{4.4.2}$$

设 $A \in \mathscr{A}_{(a^c)}$，则 $a^c \in A$，故 $A \in \mathscr{B}_a$，所以 $\mathscr{A}_{(a^c)} \subseteq \mathscr{B}_a$. 反之，若 $A \in \mathscr{B}_a$，则 $a^c \in A$，故 $A \in \mathscr{A}_{(a^c)}$，即有 $\mathscr{B}_a \subseteq \mathscr{A}_{(a^c)}$. 所以 $\mathscr{A}_{(a^c)} = \mathscr{B}_a$. 同理可证 $\mathscr{B}_{(a^c)} = \mathscr{A}_a$. 所以

$$\varphi(a^c)=(\varphi(a))^c \tag{4.4.3}$$

由(4.4.1)、(4.4.2)、(4.4.3)知 φ 为软代数同态.

又由定理4.3.3知，当 $a \neq b$ 时，$\mathscr{A}_a \neq \mathscr{A}_b$，故 $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. 所以 φ 为单射. 又易证 $\varphi(L)$ 为 $(\mathscr{D}(Filt_p(L)), \cup, \cap, ^c)$ 的子软代数，从而 $\varphi: L \to \varphi(L)$ 为软代数同构.

参 考 文 献

1 中山 正著. 格论. 董克诚译. 上海: 上海科学技术出版社, 1964

2 Johnstone, P. T.. Stone Space. London: Cambridge University Press, 1982

3 汪培庄. 模糊集与随机集落影. 北京: 北京师范大学出版社, 1985

4 Gierz, G. *et al.* A Compen dium of Continuous Lattice. Springer-Verlag, 1980

5　张德学，刘应明．分配格的 L-fuzzy 拓扑表示与 L-fuzzy 理想．数学年刊，1994; 15(1): 59—68
6　王国俊.论 Fuzzy 格之构造．数学学报，1986; 29: 539—543
7　王国俊．φ-极小集理论及其应用．科学通报，1986; 31: 1049—1053
8　胡长流等.格论基础．开封：河南大学出版社，1990
9　刘文奇．软代数的表示定理．模糊系统与数学，1999; 13(1): 4—9
10　刘文奇．Pawlak 代数及其性质．模糊系统与数学，1999; 13(2): 3—10

第五章　软代数上的可测结构

前面用 Boole 代数 $(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, {}^c)$ 张成严格软代数 $(\Phi_{\mathscr{A}}(X), \vee, \wedge, {}^-)$（当 $\mathscr{A}=\{0,1\}$ 时可视为 $(YN(X), \oplus, \odot, {}^c)$）。我们知道，建立在软代数上的数学模型是描述和处理模糊系统的工具．其中，软代数上的可测结构的研究为模糊信息处理的前提．为此，本章将深入研究 $(\Phi_{\mathscr{A}}(X), \vee, \wedge, {}^-)$ 上的可测结构，特别是由 $(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, {}^c)$上的可测结构诱导出来的可测结构．

§1　$YN(X)$ 上的可测结构

一、$YN(X)$ 上的一般可测结构

定义 5.1.1　设 X 为非空经典集合，$\mathscr{E} \subseteq YN(X)$，若 $\mathscr{E}$ 满足：

(1) $(X, \varnothing) \in \mathscr{E}$.

(2) 若 $A \in \mathscr{E}$，则 $A^c \in \mathscr{E}$

(3) 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{E}$，则 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{E}$

则称 $\mathscr{E}$ 为 $YN(X)$ 上的 σ **代数**，称 $(YN(X), \mathscr{E})$ 为 X 上的**可测集对空间**.

定理 5.1.1　若 $\mathscr{E}$ 为 $YN(X)$ 上的 σ 代数，则

(1) $(\varnothing, X) \in \mathscr{E}$；

(2) 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{E}$，则 $\bigodot_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{E}$.

证明　由于 $(\varnothing, X) = (X, \varnothing)^c$ 及定义 5.1.1 的(2)即得 $(\varnothing, X)$

$\in\mathscr{E}$。又由定义 5.1.1 的 (3) 及对偶律可得本定理的 (2)。

定义 5.1.2 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset YN(X)$，称 $\bigodot_{k=1}^{\infty}\bigoplus_{n=k}^{\infty}A_n$ 为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上限集对，记为 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$；称 $\bigoplus_{k=1}^{\infty}\bigodot_{n=k}^{\infty}A_n$ 为 $[A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的下限集对，记为 $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$。

易证，$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\prec\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$。

定理 5.1.2 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n',\ \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n'')$,

$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n',\ \overline{\lim_{n\to\infty}}A_n'')\ (\forall n,\ A_n=(A_n',\ A_n''))$.

证明
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigodot_{k=1}^{\infty}\bigoplus_{n=k}^{\infty}A_n=\bigodot_{k=1}^{\infty}\bigoplus_{n=k}^{\infty}(A_n',\ A_n')$$
$$=\bigodot_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n',\ \bigcap_{n=k}^{\infty}A_n'')=(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n',\ \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n'')$$
$$=(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n',\ \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n'')$$

同理，$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n',\ \overline{\lim_{n\to\infty}}A_n'')$,

定义 5.1.3 设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset YN(X)$，若 $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$，则称$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛，称 $\lim_{n\to\infty}A_n\triangleq\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n(=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n)$为$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限。

由经典集合论易知

定理 5.1.3 设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset YN(X)$，则

(1) 若$\forall n$，$A_n\prec A_{n+1}$，则$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛且有
$$\lim_{n\to\infty}A_n=(\lim_{n\to\infty}A_n',\ \lim_{n\to\infty}A_n'')=\bigoplus_{n=1}^{\infty}A_n;$$

(2) 若 $\forall n$，$A_{n+1}\prec A_n$，则$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛且有

$$\lim_{n\to\infty} A_n = (\lim_{n\to\infty} A_n', \ \lim_{n\to\infty} A_n'') = \bigodot_{n=1}^{\infty} A_n .$$

定义 5.1.4 设 $(YN(X), \mathscr{E})$为可测集对空间，若映射 m^*: $\mathscr{E} \to [0, 1]$满足：

(1) $m^*(\varnothing, X)=0$, $m^*(X,\varnothing)=1$;

(2) 若 A, $B\in \mathscr{E}$ 且 $A \prec B$, 则 $m^*(A)\leqslant m^*(B)$;

(3) 若$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset \mathscr{E}$且 $A_i \odot A_j=(\varnothing, X)(i\neq j)$, 则

$m^*(\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$, 则称 m^* 为$(YN(X), \mathscr{E})$上的概率，$(YN(X), \mathscr{E}, m^*)$为概率空间；$\forall A\in \mathscr{E}$, 称 $m^*(A)$为 A 的概率。

定理 5.1.4 若$(YN(X), \mathscr{E})$为可测集对空间，则$(PYN(X), \mathscr{E}\cap PYN(X))$为可测空间。

证明 (1)因为$(\varnothing, X)$, $(X,\varnothing)\in PYN(X)$, 又$\mathscr{E}$为$\sigma$代数，故$(\varnothing, X)$, $(X,\varnothing)\in \mathscr{E}\cap PYN(X)$.

(2) 若 $(A', A'')\in PYN(X)$ 且 $(A', A'')\in \mathscr{E}$, 则 $(A', A'')^c=(A'', A')\in PYN(X)$ 且 $(A', A'')^c\in \mathscr{E}$, 故 $(A', A'')\in \mathscr{E}\cap PYN(X)$.

(3)若$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset PYN(X)$, 则对 $\forall n$, $A_n=(A_n', A_n'')$有 $A_n'\cup A_n''=X$, 即 $A_n''=(A_n')^c$, 故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n''=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n')^c=(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n')^c$ 且$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n')\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n')^c=X$. 所以 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n=(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n', \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n'')\in PYN(X)$.

若$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset \mathscr{E}$, 则由于$\mathscr{E}$为$\sigma$代数，故 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n\in \mathscr{E}$.

由此可知，若$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset \mathscr{E}\cap PYN(X)$,则 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n\in \mathscr{E}\cap PYN(X)$.

定理 5.1.5 若$(YN(X), \mathscr{E}, m^*)$为概率空间，则$(PYN(X), \mathscr{E}\cap PYN(X), m^*|_{\mathscr{E}\cap PYN(X)})$ 也为概率空间。

证明 由定理 5.1.4 及定义 5.1.4 可得.

二、概率空间的扩张

定理 5.1.6 设 (X, Σ) 为可测空间，$\Sigma^* = \{(A', A'') | A', A'' \in \Sigma$ 且 $(A', A'') \in YN(X)\}$，则 Σ^* 为 $YN(X)$ 上的 σ 代数.

证明 (1) 由为 Σ 为 X 上的 σ 代数，故 $X, \varnothing \in \Sigma$，故 $(X, \varnothing) \in \Sigma^*$.

(2) 若 $A \in \Sigma^*$，则 $A', A'' \in \Sigma$. 从而 $(A', A'')^c = (A'', A') \in \Sigma^*$，即 $A^c \in \Sigma^*$.

(3) 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma^*$，则对 $\forall A_n = (A_n', A_n'')$，有 A_n'，$A_n'' \in \Sigma$. 由于 Σ 为 σ 代数，故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n'' \in \Sigma$，从而 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n', \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n'') \in \Sigma^*$.

定义 5.1.5 设 (X, Σ) 为可测空间，$\Sigma^* = \{(A', A'') | A', A'' \in \Sigma$ 且 $(A', A'') \in YN(X)\}$，则称 $(YN(X), \Sigma^*)$ 为 (X, Σ) 诱导的**可测集对空间**.

定理 5.1.7 设 (X, Σ, m) 为 X 上的概率空间，定义 m^*: $\Sigma^* \to [0, 1]$ 如

$$m^*(A) = \frac{1}{2}[m(A') + m((A'')^c)] \tag{5.1.1}$$

其中 $A = (A', A'') \in \Sigma^*$，则 m^* 为 $(YN(X), \Sigma^*)$ 上的概率.

证明 (1) $m^*(X, \varnothing) = \frac{1}{2}[m(X) + m(\varnothing^c)] = \frac{1}{2}[1+1] = 1$,

$m^*(\varnothing, X) = \frac{1}{2}[m(\varnothing) + m(X^c)] = \frac{1}{2}[m(\varnothing) + m(\varnothing)] = \frac{1}{2}[0+0] = 0$.

(2) 若 (A', A'')，$(B', B'') \in \Sigma^*$ 且 $(A', A'') \prec (B', B'')$，那么 $A' \subseteq B'$ 且 $A'' \supseteq B''$. 从而

$$m(A') \leqslant m(B'),\ m(A'') \geqslant m(B'')$$

故

$$m^*(A',A'')=\frac{1}{2}[1+m(A')-m(A'')]\leqslant\frac{1}{2}[1+m(B')-m(B'')]=m^*(B',B'')$$

(3) 若 $A_n=(A_n',A_n'')(n=1,2,\cdots)$ 且 $A_i\odot A_j=(\varnothing,X)$ $(i\neq j)$，则当 $i\neq j$ 时，$A_i''\cup A_j''=X$，亦 $(A_j'')^c\cap(A_i'')^c=\varnothing$. 故

$$m^*(\bigoplus_{n=1}^{\infty}A_n)=m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n',\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n'')=\frac{1}{2}[1+m(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n')-m(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n'')]=\frac{1}{2}[\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n')+m((\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n'')^c)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n')+\sum_{n=1}^{\infty}m((A_n'')^c)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(m(A_n')+m((A_n'')^c))=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A_n)$$

所以，m^* 为 $(YN(X),\Sigma^*)$ 上的概率.

有时，我们称 $(YN(X),\Sigma^*,m^*)$ 为 (X,Σ,m) 的扩张.

易得 $(YN(X),\Sigma^*,m^*)$ 的性质:

定理 5.1.8 设 (X,Σ,m) 为概率空间，$(YN(X),\Sigma^*,m^*)$ 为它的扩张，则

(1) 对 $A=(A',A'')\in\Sigma^*$，$m^*(A)=m(A')$ 的充分必要条件是 $m(A')=1-m(A'')$;

(2) 若 $A\in\Sigma^*\cap PYN(X)$，则 $m^*(A)=m(A')$;

(3) $\forall A=(A',A'')$，$B=(B',B'')\in\Sigma^*$，有

$$m^*(A\oplus B)=m^*(A)+m^*(B)-m^*(A\odot B)$$

(4) 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma^*$ 且 $A_{n+1}\prec A_n(\forall n)$，$A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}m^*(A_n)=m^*(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)=m^*(A)$;

(5) 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Sigma^*$ 且 $A_n\prec A_{n+1}(\forall n)$，$A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$，则

$\lim\limits_{n\to\infty} m^*(A_n)=m^*(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)=m^*(A)$;

(6) $\forall A, B\in\Sigma^*$, 有 $m^*(A\oplus B)\leqslant m^*(A)+m^*(B)$

(7) $\forall A\in\Sigma^*$, $m^*(A^c)=1-m^*(A)$.

证明 (1)、(2) 由 m^* 的定义立即得。

(3)$m^*(A\oplus B)=m^*(A'\cup B', A''\cap B'')=\frac{1}{2}[1+m(A'\cup B')-m(A''\cap B'')]=\frac{1}{2}[1+m(A')+m(B')-m(A'\cap B')-(m(A'')+m(B'')-m(A''\cup B''))]=\frac{1}{2}[(1+m(A')-m(A''))+(1+m(B')-m(B''))-(1+m(A'\cap B')-m(A''\cup B''))]=m^*(A)+m^*(B)-m^*(A\odot B)$.

(4) 设 $A_n=(A_n', A_n'')$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为渐开集对列，则$\{A_n'\}_{n=1}^{\infty}$为渐开集列，$\{A_n''\}_{n=1}^{\infty}$为渐缩集列．由概率 m 的性质，知

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n')=m(\lim_{n\to\infty} A_n')=m(A')$$

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n'')=m(\lim_{n\to\infty} A_n'')=m(A'')$$

由定理 5.1.3 有

$$\lim_{n\to\infty} m^*(A_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[1+m(A_n')-m(A_n'')]$$

$$=\frac{1}{2}[1+\lim_{n\to\infty} m(A_n')-\lim_{n\to\infty} m(A_n'')]=\frac{1}{2}[1+m(\lim_{n\to\infty} A_n')-m(\lim_{n\to\infty} A_n'')]=m^*(\lim_{n\to\infty} A_n', \lim_{n\to\infty} A_n'')=m^*(\lim_{n\to\infty} A_n)=m^*(A).$$

(5) 仿(4)证，(6)是(3)的推论。

(7)设 $A=(A', A'')\in\Sigma^*$，则 $A^c=(A'', A')\in\Sigma^*$，而

$m^*(A^c)=m^*(A'', A')=\frac{1}{2}[1+m(A'')-m(A')]=1-\frac{1}{2}[m(A')+1-m(A'')]=1-m^*(A', A'')=1-m^*(A)$.

例 5.1.1 设 $X=\{1, 2, \cdots, 100\}$，$\Sigma=\mathscr{P}(X)$，m 为古

典概率. $A=(A',A'')$ 表示远大于 10 的数类，其中 $A'=\{71, 72, \cdots, 100\}$, $A''=\{1, 2, \cdots, 20\}$, 则

$$m^*(A)=\frac{1}{2}(1+0.3-0.2)=0.55.$$

可以解释为: 在 1 到 100 的自然数中随机抽取一个数, "这个数远大于 10"的概率为 0.55.

X 上的概率的扩张是十分重要的，有了它就可以用经典事件的概率确定模糊事件的概率.

三、$YN(X)$ 上的条件概率

定义 5.1.6 设$(YN(X), \mathscr{E}, m^*)$为 $YN(X)$上的概率空间, $A\in \mathscr{E}$ 且 $m^*(A)\neq 0$, 定义 m_A^*: $\mathscr{E}\to[0, 1]$如: $\forall B\in\mathscr{E}$,

$$m_A^*(B)=\frac{m^*(A\odot B)}{m^*(A)} \tag{5.1.2}$$

称 m_A^* 为 A 条件概率, $m_A^*(B)$ 称为 A 条件下 B 的条件概率. 便于比较也记为 $m^*(B\mid A)$. 称

$$m^*(A\odot B)=m^*(A)m^*(B\mid A) \tag{5.1.3}$$

为乘法公式.

定理5.1.9 设$(YN(X), \mathscr{E}, m^*)$为概率空间, $A\in\mathscr{E}$且$m^*(A)\neq 0$ 则$(YN(X), \mathscr{E}, m_A^*)$也为概率空间.

证明 (1) $m_A^*(X,\varnothing)=\dfrac{m^*((X,\varnothing)\odot A)}{m^*(A)}=\dfrac{m^*(A)}{m^*(A)}=1$

$$m_A^*(\varnothing,X)=\frac{m^*((\varnothing,X)\odot A)}{m^*(A)}=\frac{m^*(\varnothing,X)}{m^*(A)}=0$$

(2) 若 $B_1, B_2\in\mathscr{E}$ 且 $B_1\prec B_2$. 易证 $A\odot B_1\prec A\odot B_2$, 从而 $m^*(A\odot B_1)\leqslant m^*(A\odot B_2)$, 故

$$m_A^*(B_1)=\frac{m^*(A\odot B_1)}{m^*(A)}\leqslant\frac{m^*(A\odot B_2)}{m^*(A)}=m_A^*(B_2)$$

(3) 设$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{E}$ 且 $B_i\odot B_j=(\emptyset,X)(i\neq j)$，则 $(A\odot B_i)\odot(A\odot B_j)=(\emptyset,X)(i\neq j)$，故

$$m_A^*(\bigoplus_{n=1}^{\infty}B_n)=\frac{m^*(A\odot(\bigoplus_{n=1}^{\infty}B_n))}{m^*(A)}=\frac{m^*(\bigoplus_{n=1}^{\infty}(A\odot B_n))}{m^*(A)}$$

$$=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A\odot B_n)}{m^*(A)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^*(A\odot B_n)}{m^*(A)}=\sum_{n=1}^{\infty}m_A^*(B_n).$$

定理 5.1.10 若 $A\prec B$ 且 $m^*(A)\neq0$，则 $m^*(B\mid A)=1$.

证明 当 $A\prec B$ 时，$A\odot B=A$，故结论成立.

定义 5.1.7 设$(YN(X),\mathscr{E},m^*)$为概率空间，若对 $A,B\in\mathscr{E}$ 有

$$m^*(A\odot B)=m^*(A)m^*(B) \tag{5.1.4}$$

则称 A 与 B 相互独立.

定理 5.1.11 若 A, B 相互独立，则 $m^*(B\mid A)=m^*(B)(m^*(A)\neq0)$.

证明 由定义立即得.

由乘法公式，有

定理 5.1.12 设$(YN(X),\mathscr{E},m^*)$为概率空间，$A,B\in\mathscr{E}$ 且 $m^*(A)m^*(B)\neq0$，则有

$$m^*(A\mid B)=\frac{m^*(A)m^*(B\mid A)}{m^*(B)} \tag{5.1.5}$$

下面举一例说明条件概率的应用.

例 5.1.2 统计资料表明，某地区人群中有 10% 的人每天吸烟 30 支以上，20% 的人不吸烟或每天吸烟不足 10 支，30% 的人居住环境中氮氧化物和氯气浓度超标，而没有人居住环境不受氮氧化物和氯气污染．已知，在人群中有 5% 的人患上肺病无法治愈，30% 的人没有肺病．但在无法治愈的肺病患者中有 40% 的人每天吸烟 30 支以上，有 40% 的人居住环境中氮氧化物和氯气超标．在未患肺病的人中有70%的人不吸烟或每天吸烟不足

10支.

如果在对患者进行询问时得到的回答是：他吸烟严重但不知道大气污染情况. 如何估计他已患上严重肺病的可能性大小?

在严重的肺病患者中抽出一个,其最可能致病的原因是什么?

本问题中资料是不全面的. 因为只提供了一些极端事例的情况而未记录普通吸烟人和居住环境受污染但不太严重的人的信息. 另外,患者提供的信息是模糊的,病情的描述也是模糊的.

A_1=({x| x每天吸烟 30 支以上}, {x| x不吸烟或每天吸烟不足 10 支})

A_2=({x| x的居住环境中氮氧化物和氯气浓度超标}, {x| x的居住环境中大气未受氮氧化物和氯气污染})

按集对思想，A_1表示"吸烟严重"，A_2表示"严重氮氧化物和氯气污染"

B=({x| x为晚期肺病}, {x| x未患肺病})表示"严重肺病"，则

$$m^*(A_1)=\frac{1}{2}(1+10\%-20\%)=0.45$$

$$m^*(A_2)=\frac{1}{2}(1+30\%-0)=0.65$$

$$m^*(B)=\frac{1}{2}(1+5-30\%)=0.37$$

$$m^*(B|A_1)=\frac{m^*(A_1\odot B)}{m^*(A_1)}=\frac{\frac{1}{2}(1+m(A_1'\cap B')-m(A_1''\cup B''))}{m^*(A_1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1+m(A_1'\cap B')-m(A_1'')-m(B'')+m(A_1''\cap B''))}{m^*(A_1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1+5\%\times 40\%-20\%-30\%+30\%\times 70\%)}{0.45}=0.81$$

$$m^*(B \mid A_2) = \frac{\frac{1}{2}(1+5\% \times 40\% - 30\%)}{0.65} = 0.55$$

$$m^*(A_1 \mid B) = \frac{0.45 \times 0.81}{0.37} = 0.985$$

$$m^*(A_2 \mid B) = \frac{0.65 \times 0.55}{0.37} = 0.966$$

计算结果表明：

(1)严重吸烟的人较容易得严重肺病，相比之下居住环境恶劣引起严重肺病的可能性要小些。

(2)如果确诊某人患严重肺病，则两种病因是大致等可能的。

§2 $\Phi_{\mathscr{A}}(X)$上的可测结构

一、$\Phi_{\mathscr{A}}(X)$上的一般可测结构

定义 5.2.1 设X为非空经典集合，$\mathscr{E} \subseteq \Phi_{\mathscr{A}}(X)$，若$\mathscr{E}$满足：

(1) $1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{E}$

(2) 若$R \in \mathscr{E}$，则$R^- \in \mathscr{E}$

(3) 若$\{R_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{E}$，则$\bigvee_{n=1}^{\infty} R_n \in \mathscr{E}$

则称$\mathscr{E}$为$\Phi_{\mathscr{A}}(X)$上的σ代数，称$(\Phi_{\mathscr{A}}(X), \mathscr{E})$为$X$上的可测集环空间。

定理 5.2.1 若$\mathscr{E}$为$\Phi_{\mathscr{A}}(X)$上的σ代数，则

(1) $0_{\mathscr{A}} \in \mathscr{E}$；

(2) 若$\{R_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{E}$，则$\bigwedge_{n=1}^{\infty} R_n \in \mathscr{E}$。

证明 (1)因为 $0_{\mathscr{A}}^-(\lambda) = ((0_{\mathscr{A}}(1 \dot{-} \lambda))^c, (0_{\mathscr{A}}(1 \dot{-} \lambda))^c$

$$=\begin{cases}(\varnothing^c,\ X^c) & 1-\lambda=0\\ (\varnothing^c,\varnothing^c) & 1-\lambda\neq 0\end{cases}=\begin{cases}(X,\varnothing) & \lambda=1\\ (X,X) & \lambda\neq 1\end{cases}=1_{\mathscr{A}}(\lambda)$$

即 $0_{\mathscr{A}}=1_{\mathscr{A}}^-$ 又 $\mathscr{E}$ 为 σ 代数，故 $0_{\mathscr{A}}\in\mathscr{E}$.

(2)可由$(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\vee,\wedge,^-)$的无限对偶律及定义5.2.1之(3)获得.

定义 5.2.2 设$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Phi_{\mathscr{A}}(X)$，称 $\bigwedge\limits_{k=1}^{\infty}\bigvee\limits_{n=k}^{\infty}R_n$ 为$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$的上限集环，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ R_n$；称 $\bigvee\limits_{k=1}^{\infty}\bigwedge\limits_{n=k}^{\infty}R_n$ 为$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$的下限集环，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ R_n$.

定义 5.2.3 在$(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\vee,\wedge,^-)$上定义二元关系$\prec_{\mathscr{A}}$如：

$R_1\prec_{\mathscr{A}}R_2\Longleftrightarrow\forall\lambda\in\mathscr{A}$ 有 $R_1(\dot{\lambda})\subseteq R_2(\dot{\lambda})$ 且 $R_1(\underset{\cdot}{\lambda})\subseteq R_2(\underset{\cdot}{\lambda})$ 称“$\prec_{\mathscr{A}}$”为包含关系.

定理 5.2.2 $(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\prec_{\mathscr{A}})$是偏序集.

证明 (1)自反性显然成立，即$\forall R\in\Phi_{\mathscr{A}}(X)$，$R\prec_{\mathscr{A}}R$.

(2)反对称性．设$R_1\prec_{\mathscr{A}}R_2$且$R_2\prec_{\mathscr{A}}R_1$，则对$\forall\lambda\in\mathscr{A}$有$R_1(\dot{\lambda})\subseteq R_2(\dot{\lambda})$ 且 $R_1(\underset{\cdot}{\lambda})\subseteq R_2(\underset{\cdot}{\lambda})$ 且 $R_2(\dot{\lambda})\subseteq R_1(\dot{\lambda})$ 且 $R_2(\underset{\cdot}{\lambda})\subseteq R_1(\underset{\cdot}{\lambda})$. 故对$\forall\lambda\in\mathscr{A}$，有 $R_1(\dot{\lambda})=R_2(\dot{\lambda})$ 且 $R_1(\underset{\cdot}{\lambda})=R_2(\underset{\cdot}{\lambda})$，即 $R_1=R_2$.

(3)传递性．设$R_1\prec_{\mathscr{A}}R_2$且$R_2\prec_{\mathscr{A}}R_3$，则对$\forall\lambda\in\mathscr{A}$有$R_1(\dot{\lambda})\subseteq R_2(\dot{\lambda})\subseteq R_3(\dot{\lambda})$ 且 $R_1(\underset{\cdot}{\lambda})\subseteq R_2(\underset{\cdot}{\lambda})\subseteq R_3(\underset{\cdot}{\lambda})$. 即对$\forall\lambda\in\mathscr{A}$，有 $R_1(\dot{\lambda})\subseteq R_3(\dot{\lambda})$ 且 $R_1(\underset{\cdot}{\lambda})\subseteq R_3(\underset{\cdot}{\lambda})$，亦即 $R_1\prec_{\mathscr{A}}R_3$.

显然，对 $\forall R\in\Phi_{\mathscr{A}}(X)$，有 $0_{\mathscr{A}}\prec_{\mathscr{A}}R\prec_{\mathscr{A}}1_{\mathscr{A}}$. 另外，对$\forall\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Phi_{\mathscr{A}}(X)$，有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ R_n\prec_{\mathscr{A}}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ R_n$.

定理 5.2.3 设$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Phi_{\mathscr{A}}(X)$，则对$\forall\lambda\in\mathscr{A}$

$$(\overline{\lim_{n\to\infty}}R_n)(\lambda)=(\overline{\lim_{n\to\infty}}R_n(\dot{\lambda}),\ \overline{\lim_{n\to\infty}}R_n(\underset{\cdot}{\lambda}))$$

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}}R_n)(\lambda)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}R_n(\dot{\lambda}),\ \underline{\lim_{n\to\infty}}R_n(\underset{\cdot}{\lambda}))$$

证明 $(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}R_n)(\lambda)=(\bigwedge\limits_{k=1}^{\infty}\bigvee\limits_{n=k}^{\infty}R_n)(\lambda)$

$$=\bigwedge_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}R_n(\dot{\lambda}),\ \bigcup_{n=k}^{\infty}R_n(\underset{\cdot}{\lambda})\right)=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}R_n(\dot{\lambda}),\ \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}R_n(\underset{\cdot}{\lambda})\right)$$

$$=(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,R_n(\dot{\lambda}),\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\,R_n(\underset{\cdot}{\lambda}))$$

同理 $(\underline{\lim_{n\to\infty}}\,R_n)(\lambda)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}\,R_n(\dot{\lambda}),\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,R_n(\underset{\cdot}{\lambda}))$.

定义 5.2.4 设$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Phi_{\mathscr{A}}(X)$，若$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,R_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,R_n$，则称$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛，称$\lim_{n\to\infty}R_n\triangleq\overline{\lim_{n\to\infty}}\,R_n\ (=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,R_n)$为$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限。

易知，

定理 5.2.4 设$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Phi_{\mathscr{A}}(X)$，则

(1) 若$\forall n$, $R_n\prec_{\mathscr{A}}R_{n+1}$，则$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛且有 $\lim_{n\to\infty}R_n=\bigvee_{n=1}^{\infty}R_n$;

(2) 若$\forall n$, $R_{n+1}\prec_{\mathscr{A}}R_n$，则$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛且有 $\lim_{n\to\infty}R_n=\bigwedge_{n=1}^{\infty}R_n$.

定义 5.2.5 设$(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\mathscr{E})$为可测集环空间,若映射 $m_{\mathscr{A}}^{**}$: $\mathscr{E}\to[0,1]$满足:

(1) $m_{\mathscr{A}}^{**}(0_{\mathscr{A}})=0$, $m_{\mathscr{A}}^{**}(1_{\mathscr{A}})=1$;

(2) 若 $R_1, R_2\in\mathscr{E}$ 且 $R_1\prec_{\mathscr{A}}R_2$，则 $m_{\mathscr{A}}^{**}(R_1)\leqslant m_{\mathscr{A}}^{**}(R_2)$;

(3) 若$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{E}$ 且 $R_i\wedge R_j=0_{\mathscr{A}}\ (i\neq j)$，则 $m_{\mathscr{A}}^{**}(\bigvee_{n=1}^{\infty}R_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m_{\mathscr{A}}^{**}(R_n)$，则称 $m_{\mathscr{A}}^{**}$ 为$(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\mathscr{E})$上的概率，$(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\mathscr{E},m_{\mathscr{A}}^{**})$为概率空间；$\forall R\in\mathscr{E}$，称 $m^{**}(R)$ 为 R 的概率。

在实际中，一般$\mathscr{A}$为一个有限集,设为$\mathscr{A}=\{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1},\lambda_n\}$，其中$0<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$且$\lambda_{n-i}=1-\lambda_i$。而我们总是

希望能用 X 上的测度构造出一个 $\Phi_{\mathscr{A}}(X)$ 上的概率空间。这样做有必要将定义 5.2.5 作适当修改，即改为

(2)′ 设 $R_1,\ R_2 \in \mathscr{E}$ 且对 $\forall\lambda_k \in \mathscr{A}$，总存在某个 $\lambda_{k+p} \in \mathscr{A}$ 使 $R_1(\dot{\lambda}_k)=R_2(\dot{\lambda}_{k+p})$ 且 $R_1(\underset{.}{\lambda}_k)=R_2(\underset{.}{\lambda}_{k+p})$，则 $m^{**}_{\mathscr{A}}(R_1)\leqslant m^{**}_{\mathscr{A}}(R_2)$。

(2)′ 所确定的单调性要比(2)弱一些。实际上由(2)′ 中的条件部分可得 $R_1 \prec_{\mathscr{A}} R_2$。因此称(2)′为弱单调性。

二、从 X 到 $\Phi_{\mathscr{A}}(X)$ 的概率扩张

设$(X,\ \Sigma,m)$为概率空间，定义 $\Sigma^{**}=\{R \mid \forall\lambda\in\mathscr{A},\ (R(\dot{\lambda}),\ R(\underset{.}{\lambda}))\in\Sigma\times\Sigma,\ R\in\Phi_{\mathscr{A}}(X)\}$。

定理 5.2.5 $(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\ \Sigma^{**})$ 为可测集环空间。

定理 5.2.6 m^{**}: $\Sigma^{**}\rightarrow[0,\ 1]$ 定义为

$$m^{**}(R)=\sum_{k=0}^{n} m[R(\dot{\lambda}_k)-R(\underset{.}{\lambda}_k)]\lambda_k+\sum_{k=1}^{n}[m(R(\underset{.}{\lambda}_{k-1}))-m(R(\dot{\lambda}_k))]\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2} \tag{5.2.1}$$

则 $(\Phi_{\mathscr{A}}(X),\ \Sigma^{**},\ m^{**})$ 为概率空间。

证明 (1)由于

$$0_{\mathscr{A}}(\lambda)=\begin{cases}(X,\varnothing) & \lambda=0\\ (\varnothing,\varnothing) & \lambda\neq 0\end{cases}\qquad 1_{\mathscr{A}}(\lambda)=\begin{cases}(X,\ X) & \lambda\neq 1\\ (X,\ \varnothing) & \lambda=1\end{cases}$$

所以，对一切 $k\neq 0$，有 $0_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda}_k)-0_{\mathscr{A}}(\underset{.}{\lambda}_k)=\varnothing$，$0_{\mathscr{A}}(\underset{.}{\lambda}_{k-1})-0_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda}_k)=\varnothing$，而 $0_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda}_0)-0_{\mathscr{A}}(\underset{.}{\lambda}_0)=X$，故 $m^*(0_{\mathscr{A}})=0$。

又对一切 $k\neq n$，有 $1_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda}_k)-1_{\mathscr{A}}(\underset{.}{\lambda}_k)=X-X=\varnothing$，$1_{\mathscr{A}}(\underset{.}{\lambda}_{k-1})-1_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda}_k)=\varnothing$，而 $1_{\mathscr{A}}(\dot{\lambda}_n)-1_{\mathscr{A}}(\underset{.}{\lambda}_n)=1_{\mathscr{A}}(\dot{1})-1_{\mathscr{A}}(\underset{.}{1})=X-\varnothing=X$；故

$$m^{**}(1_{\mathscr{A}})=1\cdot 1+\sum_{k\neq n}\lambda_k\cdot 0+\sum_{k=1}^{n}0\cdot\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}=1$$

(2)′ 设 $\forall\lambda_k\in\mathscr{A}$ 总存在 $\lambda_{k+p}(>\lambda_k)$ 使 $R_1(\dot{\lambda}_k)=R_2(\dot{\lambda}_{k+p})$ 且 $R_1(\underset{.}{\lambda}_k)=R_2(\underset{.}{\lambda}_{k+p})$，那么

$$m^{**}(R_1)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k m(R_1(\dot{\lambda}_k)-R_1(\lambda_k))+\sum_{k=1}^{n}m(R_1(\lambda_{k-1})-R_1(\dot{\lambda}_k))\cdot$$

$$\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k m(R_2(\dot{\lambda}_{k+p})-R_2(\lambda_{k+p}))+\sum_{k=1}^{n}m(R_2(\lambda_{k+p-1})-$$

$$R_2(\dot{\lambda}_{k+p}))\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k+p}m(R_2(\dot{\lambda}_{k+p})-R_2(\lambda_{k+p}))+$$

$$\sum_{k=1}^{n}m(R_2(\lambda_{k+p-1})-R_2(\dot{\lambda}_{k+p}))\frac{\lambda_{k+p-1}+\lambda_{k+p}}{2}\leqslant m^{**}(R_2).$$

(3) 设 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\Phi_{\mathscr{A}}(X)$, 且$R_i\wedge R_j=0_{\mathscr{A}}\ (i\neq j)$, 则对$\forall\lambda_k\in\mathscr{A}$, $R_i(\dot{\lambda}_k)\cap R_j(\dot{\lambda}_k)=\varnothing$且$R(\lambda_k)\cap R_j(\lambda_k)=\varnothing\ (i\neq j)$, 故

$$m^{**}(\bigvee_{i=1}^{\infty}R_i)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k m((\bigvee_{i=1}^{\infty}R_i)(\dot{\lambda}_k)-(\bigvee_{i=1}^{\infty}R_i)(\lambda_k)+\sum_{k=1}^{n}m((\bigvee_{i=1}^{\infty}R_i)$$

$$(\lambda_{k-1})-(\bigvee_{i=1}^{\infty}R_i)(\dot{\lambda}_k))\cdot\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k m(\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i(\dot{\lambda}_k)-\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i(\lambda_k))+$$

$$\sum_{k=1}^{n}m(\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i(\lambda_{k-1})-\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i(\dot{\lambda}_k))\cdot\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(m(\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i(\dot{\lambda}_k))-m(\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i(\lambda_k))+$$

$$\sum_{k=1}^{n}(m(\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i(\lambda_{k-1}))-m(\bigcup_{i=1}^{\infty}R_i(\dot{\lambda}_k)))\cdot\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(\sum_{i=1}^{\infty}m(R_i(\dot{\lambda}_k))-\sum_{i=1}^{\infty}m(R_i(\lambda_k)))+$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{\infty}m(R_i(\lambda_{k-1}))-\sum_{i=1}^{\infty}m(R_i(\dot{\lambda}_k)))\cdot\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(\sum_{i=1}^{\infty}(m(R_i(\dot{\lambda}_k))-m(R_i(\lambda_k)))+$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{\infty}(m(R_i(\lambda_{k-1}))-m(R_i(\dot{\lambda}_k)))\cdot\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k\sum_{i=1}^{\infty}m(R_i(\dot{\lambda}_k)-R_i(\lambda_k)))+\sum_{k=1}^{n}(\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}m(R_i(\lambda_{k-1})-R_i(\dot{\lambda}_k))$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k m(R_i(\dot{\lambda}_k)-R_i(\lambda_k))+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}m(R_i(\lambda_{k-1})-$$

$$R_i(\dot{\lambda}_k))\cdot\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k m(R_i(\dot{\lambda}_k)-R_i(\lambda_k))+\sum_{k=1}^{n}m(R_i(\lambda_{k-1})-$$

$$R_i(\dot{\lambda}_k))\cdot\frac{\lambda_k+\lambda_{k-1}}{2}=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(R_i)$$

参 考 文 献

1 周概容．概率论与数理统计．北京:高等教育出版社,1984

2 刘文奇,罗承忠．集合环．模糊系统与数学, 1997; 11(2): 34—39

3 刘文奇. $YN(X)$ 上的可测结构.北京师范大学学报, 1995; 31(增): 32—38

第六章　高维 Fuzzy 集的合成与综合决策

在实际中我们经常地碰到一些 Fuzzy 集，影响它的因素[1]较多。这类 Fuzzy 集的隶属度函数是多元函数，在应用的过程中确定这样的多元函数往往比较困难。反之，单因素的 Fuzzy 集的隶属度确定要简单得多，因为它是一个一元函数。我们称多因素的 Fuzzy 集为高维 Fuzzy 集，而称单因素的 Fuzzy 集为一维 Fuzzy 集。一个自然的问题是如何用若干个一维 Fuzzy 集合成高维 Fuzzy 集？这个问题在多目标综合决策中也具有一般意义。原因是方案对总目标的优良度可以看作是"好方案"集合（一个高维 Fuzzy 集）的隶属度，而方案对某单目标的优良度可看作是"某方面看的好方案"集合（一维 Fuzzy集）的隶属度。

要考虑这个合成问题，首先得研究因素之间的层次结构。而针对这种因素间的层次结构，汪培庄教授和李洪兴教授较系统地研究了因素空间，建立了相应的理论[2,3,4,5]。

本章先简单介绍一下因素空间的基本内容，然后再给出一些高维 Fuzzy 集的合成技术，其中包括李洪兴教授和作者近期的工作。

§1　因素空间

一、因　素

"因素"作为因素空间理论的元词是不加以定义的（这好比数学

中的"元素"),从概念角度讲,可以从四个方面加以理解。

(1)归因性：它有两层含义。其一是由果索因的思维方式中因素所处的地位,即作为引起某结果的事物。由于实际中的结果是多个原因联合作用引发的,因此相对于结果而言因素是下一层次的东西,结构上也显得较简单些。其二,因素作为事物在某方面的状态和特征的集中抽象,它总览了这方面的全部可能状态或特征,可以理解一类状态或一组特征的表示。比如,"降雨"是"丰收"的一个因素,它集中表示了某地区某时期全部可能的降雨量,而降雨量的每一个可能值则是状态。可以说,因素是状态的普遍化,而状态是因素的具体化。再如,"性别"作为"正常人"的一个因素,它有两个状态,即"男"和"女"。

(2)解析性：概念的形成是通过对比来寻求不同事物之间的差别来实现的。然而,这种对比必须建立在某种共性之上,断不能在风马牛不相及的事物之间进行。这种共性就是因素,差别则体现为状态的不同。因此,因素又可视为认识客观对象的一个视角,也是从某个侧面认识对象的识别方式。因此,因素具有分解的功能,因而是解析性认识方法。例如,认识人可以从性别、年龄、身高、职业等角度去看,也就是说"性别"、"年龄"、"身高"等为"人"的因素。

(3)描述性：任何事物的图景都是某些因素的状态之间的一个特定组合,可以视为广义坐标系中的一个点,而广义坐标系的每一条轴都表示了某个因素的状态集合(即状态空间)。因此,因素又可视为广义坐标系的维名称。

(4)层次性：因素是分层的,这是因为某一事物可以是某些原因的结果同时又成为另一结果的原因之一。这就导致了因素角色的转化。例如,"学生"可以用"学习成绩"、"道德品质"、"健康情况"加以反映,而"学习成绩"又可进一步由各科成绩反映,"道德品质"又可由"同学关系"、"对长辈的态度"等加以表现。

二、因素的状态空间

一个事物并非与任何因素都有关，如石头只与化学成分、硬度等有关但与性别无关．所谓事物 u 与因素 f 相关，是指从 f 谈论 u，总有一个状态 $f(u)$ 与之对应．

若 U 与 V 分别表示一些对象所成之集和一些因素所成之集且对 $\forall u\in U$，一切与 u 有关的因素都在 V 中，则称 $(U、V]$ 为一个左配对．

给定一个左配对 $(U、V]$，定义二元关系 R 如

$$R(u,\ f)=1 \Longleftrightarrow u \text{ 与 } f \text{ 有关}$$

记 $D(f)\triangleq\{u|u\in U,\ R(u,\ f)=1\}$，则 f 可视为一个映射

$$f: D(f)\to X(f),\ u\mapsto f(u)$$

其中 $X(f)\triangleq\{f(u)|u\in D(f)\}$，称 $X(f)$ 为 f 的状态空间，$X(f)$ 的元素称为 f 的状态．

根据状态空间的不同，因素大致分为四种类型：

(1)变量型：此类因素的状态空间为一维或多维欧氏空间的某个子集．因此它们通常为连续或离散的变量．如时间、长度、质量等均属此类．

(2)符号型：其状态空间由某些特定的记号组成，这些记号可以是名称，也可以是其他代号．如职业即属此类，其状态空间是{教师、律师、工人、农民、医生，……}．

(3)开关型：其状态空间只有两个元素，可以记为{yes, no}，也可以记为{0, 1}或其他某对反义词(如{男，女}、{有机，无机}等)．

(4)程度型：其状态空间一般为[0, 1]，但状态取值方面具有一定主观性但有相对的程度可言．如创造性、满意度、可靠性、贴近度等即属此类．

三、因素的关系和运算

θ 为一个特殊的记号，表示空状态，它满足

$$\{x, \theta\}=\{x\}, \quad (x, \theta)=(\theta, x)=x \tag{6.1.1}$$

即 θ 与其他元素组成集合或序偶均无效.

定义 6.1.1 称符号 0 为**零因素**是指其状态空间 $X(0)=\theta$.

零因素在因素空间中的作用与空集在集论中的作用相类似. 由(6.1.1)知，对任意因素 f 有

$$X(f)\times X(0)=X(0)\times X(f)=X(f)$$

约定: 对任何一个左配对 $(U, V]$，均有 $0\in V$.

如前所云，因素 f 可视为映射 $f: D(f)\rightarrow X(f)$，可以将 f 延拓至整个 U 上并仍记为 f，即

$$f: U\rightarrow X(f), \quad u\mapsto \begin{cases} f(u) & u\in D(f) \\ \theta & x\notin D(f) \end{cases}$$

定义 6.1.2 设 f 和 g 为因素，若 $D(f)=D(g)$, $X(f)=X(g)$ 且 $(\forall u)\ \ f(u)=g(u)$, 则称 f 与 g **相等**，记为 $f=g$.

定义 6.1.3 设 f 和 g 为因素，若存在集合 $Y\neq\varnothing$ 且 $Y\neq\{0\}$ 使 $X(f)=X(g)\times Y$ (或 $X(f)=Y\times X(g)$), 则称 g 为 f 的**真子因素**，记为 $g<f$。g 为 f 的**子因素**是指 $g<f$ 或 $g=f$，记为 $g\leqslant f$.

子因素的实际含义是 f 的状态一旦确定则 g 的状态随之而定. 例如 f 表示点的平面坐标，g 代表点的横坐标，则 $g<f$.

显然零因素为任何因素的子因素。

定义 6.1.4 设 h, f, g 为因素，且

(1) $h\leqslant f$ 且 $h\leqslant g$

(2) $e\leqslant f$ 且 $e\leqslant g\Rightarrow e\leqslant h$

则称 h 为 f 和 g 的**交因素**(或合取因素)，简称交，记为 $h=f\wedge g$.

f 和 g 的交即为 f 和 g 的最大公共子因素. 交运算可以推广至因素族 $\{f_t\}_{t\in T}$ 的无限交，记作 $g=\bigwedge_{t\in T} f_t$，意为

(1) $\forall t \in T,\ g \leqslant f_t$

(2) $(\forall h \in V,\ \forall t \in T)\ h \leqslant f_t \Rightarrow h \leqslant g$.

比如 f 表示"立方体的长和宽"，g 表示"立方体的宽和高"，则 $f \wedge g$ 为"立方体的宽"。

定义 6.1.5 设 f，g，h 为因素，且

(1) $f \leqslant h$ 且 $g \leqslant h$

(2) $f \leqslant e$ 且 $g \leqslant e \Rightarrow h \leqslant e$

则称 h 为 f 和 g 的**并因素**(或析取因素)，简称并，记为 $h = f \vee g$。

同理，并也可以推广至无限的情形 $\bigvee_{t \in T} f_t$。

显而易见有

$$
\begin{aligned}
f \wedge g &= \vee\{e \mid e \leqslant f \text{ 且 } e \leqslant g\} \\
f \vee g &= \wedge\{e \mid f \leqslant e \text{ 且 } g \leqslant e\}
\end{aligned}
\tag{6.1.2}
$$

定义 6.1.6 设 f 和 g 为因素，若 $f \wedge g = 0$，则称 f 与 g **相互独立**。

定义 6.1.7 $\{f_t\}_{t \in T}$ 为因素族，称 $\{f_t\}_{t \in T}$ 是**两两独立的**，是指它满足：$\forall s,\ t \in T$ 且 $s \neq t$ 时

$$f_s \wedge f_t = 0$$

此时亦简称 $\{f_t\}_{t \in T}$ 是独立的。

显然，相互独立的因素的子因素也相互独立；零因素与任何因素均相互独立。

定义 6.1.8 设 f，g，h 为因素，且满足

(1) $(f \wedge g) \vee h = f$

(2) $h \wedge g = 0$

则称 h 为 f 减 g 的**差因素**，记为 $h = f - g$.

显然，当 $f \leqslant g$ 时，$f - g = 0$，又例如 f 表示点的平面坐标，g 表示点的横坐标，则 $h = f - g$ 即表示点的纵坐标。

定义 6.1.9 设 F 为因素集，$1\in F$ 且对 $\forall f\in F$ 有 $f\leqslant 1$，则称 1 为 F 的**全因素**；$1-f$ 为 f 关于 1 的**余因素**，记为 f^c。

定义 6.1.10 若因素 f 没有零因素以外的真子因素，则称 f 为**原子因素**。设 F 为一个因素集，则称 $\pi=\{f\in F \mid f\text{ 为原子因素}\}$ 为 F 的**原子因素集**。

显然原子因素是彼此独立的，故

$$X(\vee\pi)=\prod_{f\in\Pi}X(f) \tag{6.1.3}$$

事实上，对任一族独立的因素集，则

$$X(\bigvee_{t\in T}f_t)=\prod_{t\in T}X(f_t)$$

如果 F 存在原子因素 π，则 F 中任一因素 f 均可表示为 π 的一个子集的析取，因此又可以视为 π 的一个子集，所以

$$F=\mathscr{P}(\pi)=\{S \mid S\subseteq\pi\}$$

且

$$X(f)=\prod_{g\in f}X(g),\quad X(1)=\prod_{f\in\pi}X(f)$$

由于 π 的幂集 $\mathscr{P}(\pi)$ 为 Boole 代数，我们可以给出因素空间的公理化定义。

四、因素空间的定义

定义 6.1.11 设 $(U, V]$ 为左配对，$F\subseteq V$，称集合族 $\{X(f)\}_{f\in F}$ 为 U 上的一个**因素空间**，如果满足

(F_1) $(F,\vee,\wedge,{}^c,0,1)$ 为完全的 Boole 代数；

(F_2) $X(0)=\{0\}$；

(F_3) 若 $T\subseteq F$，且对 $\forall f,\ g\in T$，$f\neq g$ 时 $f\wedge g=0$，则 $X(\vee T)=\prod_{f\in T}X(f)$。

此时称 F 为**因素集**，$f\in F$ 为**因素**，$X(f)$ 为 f 的**状态空间**，1 叫全因

素，$X(1)$ 为全空间，0 为零因素，θ 为零状态。

例 6.1.1 设 n 为自然数，$I_n=\{1, 2, \cdots, n\}$，$F=\mathscr{P}(I_n)=\{f \mid f\subseteq I_n\}$，令 $X(f)=\prod_{i\in f} X(i)$ $X(i)=R$（规定 $\prod_{i\in\emptyset} X(i)=\{\theta\}$），则 $\{X(f)\}_{f\in F}$ 为因素空间，其为一族维数不超 n 的欧氏空间（维数可变）。

例6.1.2 若 $F=\{0,1\}$ 为二元格，则 $\{X(1),\{\emptyset\}\}$ 构成一个因素空间，$\{\emptyset\}$ 可视为多余的符号，因此 $\{X(1),\{\emptyset\}\}$ 退化为单一状态空间 $X(1)$。

现代控制论中的状态空间、模式识别中的特征空间和参数空间，现代物理学中的相空间等都是因素空间的特殊情形。因素空间不是一个固定的状态空间，而是一族维数可变的状态空间，"变维"是因素空间的核心思想之一。

若 $\{X(f)\}_{f\in F}$ 为一因素空间，$f, g\in F$，则

$$f\vee g=(f-g)\vee(f\wedge g)\vee(g-f) \qquad (6.1.4)$$

且 $f-g$, $f\wedge g$, $g-f$ 两两独立，从而

$$X(f\vee g)=X(f-g)\times X(f\wedge g)\times X(g-f) \qquad (6.1.5)$$

（这是一个常用的公式）。

当然，我们也可以从映射的观点给出因素空间的另一组公理[3]。

五、概念的描述架

概念是最基本的思维形式，是知识形成的基本要素。概念的描述有三种方式：

(1) 内涵方式：指明一个概念所具有的本质属性；

(2) 外延方式：指明符合概念的所有对象所形成的范畴；

(3) 概念结构：从概念与概念之间的相互关系中说明一个概念。

经典集合论描述的是清晰概念的外延，而 Fuzzy 集合论描述的一般概念的外延(无论清晰与否)。它们始终没有解决好论域的选择好变换问题(其中包括高维 Fuzzy 集的合成问题)。内涵的表示则是数学研究的禁地。

假定要讨论一组概念 $\mathscr{C}=\{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$，它们的论域为 U。取因素族 V，使 U 与 V 组成一个左配对$(U, V]$，再取 $F\subset V$，使得 F 对 U 是充足的，即满足

$$(\forall u_1, u_2\in U)(\exists f\in F)(f(u_1)\neq f(u_2)) \qquad (6.1.6)$$

此时称 $(U, \mathscr{C}, F]$ 或 $(U, \mathscr{C}, \{X(f)\}_{f\in F}]$ 为 $\mathscr{C}$ 的一个描述架。

定理 6.1.1 对于给定的描述架$(U, \mathscr{C}, F]$，全因素 1 必为单射。

证明 首先不难验证下面两个性质:

$$(\forall f, g\in F)(g\leqslant f\Rightarrow(f=g\vee(f-g),\ g\wedge(f-g)=0))$$

$$(\forall f\in F)(1=f\vee f^c)$$

因为$(U, \mathscr{C}, F]$是一个描述架，故由 F 的充足性可知，对任意 u_1，$u_2\in U$ 存在 $f\in F$ 使 $f(u_1)\neq f(u_2)$，由上述性质便知

$$1(u_1)=(f(u_1),\ f^c(u_1))\neq(f(u_2),\ f^c(u_2))=1(u_2)$$

故全因素 1 为单射。

注：(1) $f: U\to X(f)\triangleq\{f(u)\mid u\in U\}$ 总是满射，从而全因素 1 为双射；(2)"充足性"意味着对于 U 中任何两个不同的对象，总存在一个因素 $f\in F$ 把它们的状态区分开来。

在既定的描述架$(U, \mathscr{C}, F]$中，任取一个概念$\alpha\in\mathscr{C}$，它在 U 中外延是 U 上的一个 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(U)$，实际上 A 是一个映射:

$$A: U\to[0, 1],\quad u\mapsto A(u)$$

特别地，若 $A(U)=\{0, 1\}$，则称 A 为普通集，α 为清晰概念(或精确概念)。对于$\mathscr{C}$每个状态空间 $X(f)(f\in F)$ 都叫做表现论域，其中 $X(1)$ 叫做完全表现论域。对于$f\in F$，按 Zadeh 扩展原理，将 f 扩展为 $f: \mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(X(f))$:

$$f(A):\ X(f)\to[0,\ 1],\quad x\mapsto f(A)(x)\triangleq\bigvee_{f(u)=x}A(u)$$

称 $f(A)$ 为概念 α 在表现论域 $X(f)$ 中的表现外延，也记作 $A(f)$. 这样一来，U 上的概念外延便通过诸因素的状态在表现论域 $X(f)$ 上表现出来，从而转化为 $X(f)$上的概念. 这个表现的过程是一个"分解"的过程. 一般情况下，α 在 $X(f)$ 中的表现外延比较容易确定. 因此，我们面临的一个有意义的问题是如何用较简单的因素的状态空间 $X(g)$ 中的表现外延来合成较复杂的因素的状态空间$X(g)$中的表现外延(这里 $g\leqslant f$). 特别当 $f=1$ 时，由于 $1(A)(u)=A(u)$, 故问题转化为如何用低维Fuzzy集合成高维Fuzzy集的问题. 合成规则之一是尽可能满足

$$\begin{cases}A(u)=\varphi(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots,\ x_m)\\ f_i(A)(x_i)=\bigvee_{f_i(u)=x_i}A(u)\end{cases}$$

(其中 $1=\bigvee_{i=1}^{m}f_i$).

这就是下一节所要解决的主要问题. 其他合成规则则在以后各节中加以讨论.

§2　表现外延的投影与柱体扩张

给定描述架$(U,\mathscr{C},\{X(f)\}_{(f\in F)}]$, 任取 f, $g\in F$, $f\geqslant g$, 记

$$\downarrow_g^f:\ X(f)\to X(g),\quad (x,\ y)\mapsto\downarrow_g^f(x,\ y)\triangleq x$$

这里 $X(f)=X(g)\times X(f-g)$, $x\in X(g)$, $y\in X(f-g)$. 称$\downarrow_g^f$ 为从 f 到 g 的投影.

取概念 $\alpha\in\mathscr{C}$，它的外延为 $A\in\mathscr{F}(U)$. 对于上述的因素 f 与 $g(f\geqslant g)$, 如果已知 α 关于 f 的表现外延 $B=f(A)\in\mathscr{F}(X(f))$, 可以通过"投影"的方法得到 α 关于 g 的表现外延. 事实上，由扩展原理将$\downarrow_g^f$扩展为:

$$\downarrow_g^f: \mathscr{F}(X(f)) \to \mathscr{F}(X(g)),\ B \mapsto \downarrow_g^f(B) \triangleq \downarrow_g^f B$$

$$\downarrow_g^f B: X(g) \to [0, 1],\quad x \mapsto (\downarrow_g^f B)(x)$$

$$(\downarrow_g^f B)(x) = \bigvee_{\downarrow_g^f(x, y) = x} B(x, y) = \bigvee_{y \in X(f-g)} B(x, y)$$

称 $\downarrow_g^f B$ 为 B 从 f 向 g 的投影.

自然我们会考虑这样一个问题：对于概念 α, 已知 α 关于 f 的表现外延 $B=f(A)$, 再求这个表现外延 B 从 f 向 g 的投影 $\downarrow_g^f B$, 那么 $\downarrow_g^f B$ 是否与 α 关于 g 的表现外延 $B'=g(A) \in \mathscr{F}(X(g))$ 一致？即是否成立关系式 $\downarrow_g^f f(A)=g(A)$？下面要介绍的定理 6.2.1 肯定地回答了这个问题. 为此先给出一个引理.

引理 6.2.1 设 X, Y, Z 为三个论域；$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 为两个映射. 对任意 Fuzzy 子集 $A \in \mathscr{F}(X)$, 均有

$$g(f(A)) = (g \circ f)(A) \tag{6.2.1}$$

证明 对任意 $z \in Z$, 我们有

$$g(f(A))(z) = \bigvee_{g(y)=z} f(A)(y) = \bigvee_{g(y)=z} \left(\bigvee_{f(x)=y} A(x) \right)$$

$$= \bigvee \{A(x) | f(x) = y,\ g(y) = z\}$$

$$= \bigvee_{g(f(x))=z} A(x) = \bigvee_{(g \circ f)(x)=z} A(x) = (g \circ f)(A)(z)$$

因此 (6.2.1) 式正确. 证毕.

定理 6.2.1 给定描述架 $(U, \mathscr{C}, F]$, f, $g \in F$, $f \geqslant g$, $\alpha \in \mathscr{C}$；若 α 的外延为 A, 则

$$\downarrow_g^f f(A) = g(A) \tag{6.2.2}$$

证明 注意到 $g=\downarrow_g^f \circ f$, 即在映射的观点下, g 是映射 f 与映射 $\downarrow_g^f$ 的复合映射, 由上述引理 6.2.1 便知 (6.2.2) 式是正确的. 证毕.

对于取定的描述架 $(U, \mathscr{C}, \{X(f)\}_{(f \in F)}]$, 取 f, $g \in F$, $f \geqslant g$, 记

$$\uparrow_g^f: X(g) \to \mathscr{P}(X(f)),\ x \mapsto \uparrow_g^f(x) \triangleq \{x\} \times X(f-g)$$

称 $\uparrow_g^f$ 为从 g 向 f 的柱体扩张.

取概念 $\alpha\in\mathscr{C}$，它的外延为 $A\in\mathscr{F}(U)$. 对于上述因素 f 与 g $(f\geqslant g)$，如果已知 α 关于 g 的表现外延 $B=g(A)\in\mathscr{F}(X(g))$，可以通过"柱体扩张"的方法得到 α 关于 f 的"粗糙的"表现外延. 事实上，类似于扩展原理，我们有:

$$\uparrow_g^f:\ \mathscr{F}(X(g))\to\mathscr{F}(X(f)),\quad B\mapsto\uparrow_g^f(B)\triangleq\uparrow_g^f B$$

$$\uparrow_g^f B:\ X(f)\to[0,\ 1],\quad (x,\ y)\mapsto(\uparrow_g^f B)(x)\triangleq B(x)$$

这里 $X(f)=X(g)\times X(f-g)$, $x\in X(g)$, $y\in X(f-g)$. 称 $\uparrow_g^f \underset{\sim}{B}$ 为 B 从 g 向 f 的**柱体扩张**.

当然我们也会考虑类似上面的一个问题: 对于概念 α，已知 α 关于 g 的表现外延 $B=g(A)$，再求这个表现外延 B 从 g 向 f 的柱体扩张 $\uparrow_g^f B$，那么 $\uparrow_g^f B$ 是否与 α 关于 f 的表现外延 $B'=f(A)\in\mathscr{F}(X(f))$ 一致? 即是否成立关系式 $\uparrow_g^f g(A)=f(A)$? 容易举出反例说明该问题的答案是否定的; 然而下面的定理指出该问题有一种较弱的结果.

定理 6.2.2 给定描述架 $(U,\mathscr{C},F]$, $f,g\in F$, $f\geqslant g$, $\alpha\in\mathscr{C}$; 若 α 的外延为 A，则

$$\uparrow_g^f g(A)\supset f(A)\tag{6.2.3}$$

证明 注意到 $f=g\vee(f-g)$ 且 $g\wedge(f-g)=0$，故 $f=g\times(f-g)$，对任何 $(x,y)\in X(f)=X(g)\times X(f-g)$，我们有

$$\begin{aligned}f(A)(x,y)&=\bigvee_{f(u)=(x,y)}A(u)=\vee\{A(u)|f(u)=(x,y)\}\\&=\vee\{A(u)|(g(u),\ (f-g)(u))=(x,\ y)\}\\&=\vee\{A(u)|g(u)=x,\ \ (f-g)(u)=y\}\\&\leqslant\vee\{A(u)|g(u)=x\}=\bigvee_{g(u)=x}A(u)=g(u)(x)\end{aligned}$$

因此(6.2.3)式是正确的. 证毕.

下面我们来看看柱体扩张的一些性质，有如下几个定理. 这

几个定理比较充分地表明了“柱体扩张”这种合成规则的特点。

定理 6.2.3 设$\{X(f)\}_{(f\in F)}$为一个因素空间，任取 f, g, $h\in F$, $f\geqslant g\geqslant h$, 我们有

(1) 若 $B\in\mathscr{F}(X(f))$, 则

$$\downarrow_h^g(\downarrow_g^f B)=\downarrow_h^f B \tag{6.2.4}$$

(2) 若 $\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(X(h))$, 则

$$\uparrow_g^f(\uparrow_h^g B)=\uparrow_h^f B \tag{6.2.5}$$

(3) 若 $B\in\mathscr{F}(X(g))$, 则

$$\downarrow_g^f(\uparrow_g^f B)=B \tag{6.2.6}$$

(4) 若 $B\in\mathscr{F}(X(f))$, 则

$$\uparrow_g^f(\downarrow_g^f B)\supset B \tag{6.2.7}$$

证明 (1) 注意到 $\downarrow_h^f=\downarrow_h^g\circ\downarrow_g^f$, 由引理 6.2.1 不难得知(6.2.4)式为真.

(2)因 $f\geqslant g\geqslant h$, 故 $X(f)=X(f-g)\times X(g-h)\times X(h)$. 对任意$(x, y, z)\in X(f-g)\times X(g-h)\times X(h)$, 有

$$(\uparrow_g^f(\uparrow_h^g B))(x, y, z)=(\uparrow_h^g B)(y, z)=B(z)$$

$$(\uparrow_h^f B)(x, y, z)=B(z)$$

由此可知(6.2.5)式正确.

(3)对任何 $\alpha\in X(g)$, 我们有

$$(\downarrow_g^f(\uparrow_g^f B))(x)=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\uparrow_g^f B)(x,y)$$

$$=\bigvee_{y\in X(f-g)}B(x)=B(x)$$

从而(6.2.6)式成立.

(4) 注意到 $X(f)=X(g)\times X(f-g)$, 对任何$(x,y)\in X(g)\times X(f-g)$, 我们有

$$(\uparrow_g^f(\downarrow_g^f B))(x,y)=(\downarrow_g^f B)(x)$$

$$=\bigvee_{y'\in X(f-g)}B(x, y')\geqslant B(x,y)$$

因此(6.2.7)式是正确的．　证毕．

注：容易举出反例说明(6.2.7)式不能变为等式，这意味着先投影后柱体扩张不一定能够还原，一般来说要变"大"．自然要问：什么情况下才能还原？下面的定理将回答这个问题．

定理 6.2.4　给定因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$，$f, g\in F$，$f\geqslant g$．对任意 $B\in\mathscr{F}(X(f))$，那么 $\uparrow_g^f(\downarrow_g^f B)=B$ 的充分必要条件为：

$$(\forall (x, y)\in X(f))(B(x, y)=B(x)) \tag{6.2.8}$$

其中 $x\in X(g)$，$y\in X(f-g)$．

证明　充分性显然，只证必要性．事实上，若(6.2.5)式不成立，则存在 y_1，$y_2\in X(f-g)$，使得 $B(x,y_1)>B(x,y_2)$，于是

$$B(x, y_2)<B(x, y_1)\leqslant\bigvee_{y\in X(f-g)}B(x, y)$$

$$=(\downarrow_g^f B)(x)=(\uparrow_g^f(\downarrow_g^f B))(x, y)$$

注意上边最后一式中的 y 是自由的，取 $y=y_2$ 便导出矛盾，从而必要性得证．　证毕．

现在我们再回过头来考察定理 6.2.2 的结论(6.2.3)式，提出一个有趣的问题：什么情况下(6.1.3)式变为等式？　定理 6.2.2 的推论可回答这个问题．

推论 6.2.1　给定描述架$(U, \mathscr{C}, F]$，$f, g\in F$，$f\geqslant g$，$\alpha\in\mathscr{C}$，α 的外延为 A，那么 $\uparrow_g^f g(A)=f(A)$ 的充分必要条件为：

$$(\forall (x, y)\in X(f))(f(A)(x, y)=f(A)(x)) \tag{6.2.9}$$

其中 $x\in X(g)$，$y\in X(f-g)$．

证明　由定理 6.1.1 可知 $\downarrow_g^f f(A)=g(A)$，将该式带入(6.1.3)式有 $\uparrow_g^f(\downarrow_g^f f(A))\supset f(A)$；再令 $B=f(A)$，又有 $\uparrow_g^f(\downarrow_g^f B)\supset B$．根据定理 6.2.4 便知本推论为真．证毕．

注：该推论还说明，(6.2.3)式与(6.2.7)式本质上是一回事，从而下面两个等式本质上也是一回事：

$$\uparrow_g^f g(A)=f(A),\quad \uparrow_g^f(\downarrow_g^f B)=B \tag{6.2.10}$$

定理 6.2.5 给定因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$，对任何 $f,\ g\in F$，$f\geqslant g$，我们有

(1)设$\{B^{(t)}\}_{(t\in T)}$是$X(g)$中一族模糊子集(表现外延)，则

$$\uparrow_g^f(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})=\bigcup_{t\in T}(\uparrow_g^f B^{(t)}) \tag{6.2.11}$$

$$\uparrow_g^f(\bigcap_{t\in T}B^{(t)})=\bigcap_{t\in T}(\uparrow_g^f B^{(t)}) \tag{6.2.12}$$

(2)设 $B\in\mathscr{F}(X(g))$，若 B 在 $X(g)$ 中的余集记为 B^c，则

$$\uparrow_g^f B^c=(\uparrow_g^f B)^c \tag{6.2.13}$$

(3)设 $B\in\mathscr{F}(X(f))$，若 B 在 $X(f)$ 中的余集记为 B^c，则

$$\downarrow_g^f B^c\supset(\downarrow_g^f B)^c \tag{6.2.14}$$

(4)设$\{B^{(t)}\}_{(t\in T)}$是 $X(f)$ 中一族模糊子集（表现外延），则

$$\downarrow_g^f(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})=\bigcup_{t\in T}(\downarrow_g^f B^{(t)}) \tag{6.2.15}$$

$$\downarrow_g^f(\bigcap_{t\in T}B^{(t)})\subset\bigcap_{t\in T}(\downarrow_g^f B^{(t)}) \tag{6.2.16}$$

(5)设 $B,\ B^{(n)}\in\mathscr{F}(X(f))$，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，则

$$B^{(n)}\uparrow B\Rightarrow(\downarrow_g^f B^{(n)})\uparrow(\downarrow_g^f B) \tag{6.2.17}$$

这里 $B^{(n)}\uparrow B$ 当且仅当 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B^{(n)}=B$.

证明 (1) $\forall(x,y)\in X(f)=X(g)\times X(f-g)$，有

$$(\uparrow_g^f(\bigcup_{t\in T}B^{(t)}))(x,\ y)=(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})(x)=\bigvee_{t\in T}B^{(t)}(x)$$

$$=\bigvee_{t\in T}(\uparrow_g^f B^{(t)})(x,\ y)=(\bigcup_{t\in T}(\uparrow_g^f B^{(t)})(x,\ y)$$

因此(6.2.11)式成立．同理可证(6.2.12)式．

(2) $\forall(x,\ y)\in X(f)=X(g)\times X(f-g)$，有

$$(\uparrow_g^f B^c)(x,\ y)=B^c(x)=1-B(x)$$

$$=1-(\uparrow_g^f B)(x,\ y)=(\uparrow_g^f B)^c(x,\ y)$$

从而(6.2.13)式为真．

(3) $\forall(x,\ y)\in X(f)=X(g)\times B(f-g)$，有

$$(\downarrow_g^f B)^c(x)=1-(\downarrow_g^f B)(x)=1-\bigvee_{y\in X(f-g)} B(x,\ y)$$

$$(\downarrow_g^f B^c)(x)=\bigvee_{y\in X(f-g)} B^c(x,\ y)=\bigvee_{y\in X(f-g)}(1-B\ (x,\ y))$$

比较上面两式右端可知$(\downarrow_g^f B)^c(x)\leqslant(\downarrow_g^f B^c)(x)$，故(6.2.14)式正确.

(4)任取$(x,\ y)\in X(f)=X(g)\times X(f-g)$，先证第一式：

$$(\downarrow_g^f(\bigcup_{t\in T} B^{(t)}))(x)=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\bigcup_{t\in T} B^{(t)})(x,\ y)$$

$$=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\bigvee_{t\in T} B^{(t)}(x,y))=\bigvee_{t\in T}(\bigvee_{y\in X(f-g)} B^{(t)}(x,y))$$

$$=\bigvee_{t\in T}(\downarrow_g^f B^{(t)})(x)=(\bigcup_{t\in T}(\downarrow_g^f B^{(t)}))(x)$$

因此第一式成立；再证第二式：

$$(\downarrow_g^f(\bigcap_{t\in T} B^{(t)}))(x)=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\bigcap_{t\in T} B^{(t)})(x,\ y)$$

$$=\bigvee_{y\in X(f-g)}(\bigwedge_{t\in T} B^{(t)}(x,\ y))$$

$$(\bigcap_{t\in T}(\downarrow_g^f B^{(t)}))(x)=\bigwedge_{t\in T}(\downarrow_g^f B^{(t)})(x)=\bigwedge_{t\in T}(\bigvee_{y\in X(f-g)} B^{(t)}(x,y))$$

注意到，对任何$y\in X(f-g)$，有

$$\bigwedge_{t\in T} B^{(t)}(x,\ y)\leqslant\bigwedge_{t\in T}(\bigvee_{y\in X(f-g)} B^{(t)}(x,\ y))$$

由此可得

$$\bigvee_{y\in X(f-g)}(\bigwedge_{t\in T} B^{(t)}(x,\ y))\leqslant\bigwedge_{t\in T}(\bigvee_{y\in X(f-g)} B^{(t)}(x,\ y))$$

从而第二式得证.

$$(5)\ B^{(n)}\uparrow B\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty} B^{(n)}=B\Rightarrow\downarrow_g^f B=\downarrow_g^f(\bigcup_{n=1}^{\infty} B^{(n)})$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\downarrow_g^f B^{(n)})\Rightarrow(\downarrow_g^f B^{(n)})\uparrow(\downarrow_g^f B)$$

证毕!

定理 6.2.6　设$\{X(f)\}_{(f\in F)}$为一个因素空间，在 F 中任取一族独立的因素族$\{f_t\}_{(t\in T)}$，若置 $f=\bigvee_{t\in T} f_t$，则

$$\bigcap_{t\in T}(\uparrow_{f_t}^{f} B^{(t)})=\prod_{t\in T} B^{(t)} \tag{6.2.18}$$

证明　对任何 $w\in\prod_{t\in T}X(f_t)\triangleq\{w|w:\ T\to\bigcup_{t\in T}X(f_t),\ w(t)\in X(f_t),\ t\in T\}$，我们有

$$\begin{aligned}(\bigcap_{t\in T}(\uparrow_{f_t}^{f}B^{(t)}))(w)&=\bigwedge_{t\in T}(\uparrow_{f_t}^{f}B^{(t)})(w)\\&=\bigwedge_{t\in T}B^{(t)}(w(t))=(\prod_{t\in T}B^{(t)})(w)\end{aligned}$$

因此(6.2.18)式正确。　证毕。

给定描述架$(U,\mathscr{C},F]$，$G=\{f_1,\cdots,f_m\}$为F中一族独立的因素，置 $f=\bigvee_{j=1}^{m}f_j$．取概念 $\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为 $A\in\mathscr{F}(U)$．假定已构造出 α 在诸表现论域 $X(f_j)(j=1,2,\cdots,m)$ 中的表现外延 $B(f_j)$ $(j=1,2,\cdots,m)$，按定理 6.2.6，可知在表现论域 $X(f)$ 中的表现外延 $B(f)$ 满足

$$\bigcap_{j=1}^{m}B(f_j)=\prod_{j=1}^{m}B(f_j)\supseteq B(f) \tag{6.2.19}$$

亦即，对任何 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in X(f)=\prod_{j=1}^{m}X(f_j)$ 有

$$B(f)\ (x_1,x_2,\cdots,x_m)\leqslant\bigwedge_{j=1}^{m}B(f_j)(x_j) \tag{6.2.20}$$

我们用 $\bigwedge_{j=1}^{m}B(f_j)(x_j)$ 作为 $B(f)(x_1,\cdots,x_m)$ 的估计值．

§3　高维状态空间的降维与 ASM$_m$ 函数

在柱体扩张合成方式中，若 $f=\bigvee_{j=1}^{m}f_j$，则 Fuzzy 集在 $X(f)$ 中的表现外延的隶属度的以在诸 $X(f_j)(j=1,2,\cdots,m)$ 中的表现外

延的隶属度的最小者为上界。但是,这种合成方式有两方面的缺点：一是合成中未考虑 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 的相对重要性；二是合成中未考虑诸因素的状态组合效应.

但是,在实际合成的过程中忽略以上两方面是欠妥的。比如一支球队的水平高低不仅与各队员的水平有关(更不是由该队中水平最低的队员水平决定)而且与队员间的配合有关,同时各队员在队中所起的作用也不一样。为此,我们将给出一种新的方法来研究高维 Fuzzy 集。这种新的合成方法是用综合函数对 f 的状态空间 $X(f)$ 进行降维获得一维空间 $X'(f)$，然后再讨论 Fuzzy 集在 $X'(f)$ 中的表现外延。换言之,用 $X'(f)$ 中的表现外延近似地作为 Fuzzy 集在 $X(f)$ 中的表现外延而不是用诸 $X(f_j)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 中的表现外延直接合成。降维的过程图示如下:

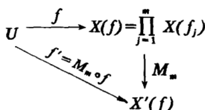


图 6.3.1　状态空间的降维

其中降维映射 M_m 的作用是把 m 维的点 $f(u)=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ $(x_j \in X(f_j), j=1, 2, \cdots, m)$ 综合成一维点,我们称此过程为状态合成.

特别地,当我们考虑某个概念的外延 A 时,可以采用变换状态空间的方法,即 $X'(f_j)=(A(f)\circ f)(U)$, 则 $X'(f_j)\subseteq[0, 1]$ $(j=1, 2, \cdots, m)$. 因此,讨论 $[0,1]^m$ 上的状态合成(或降维)具有普遍意义。此时的状态合成又可理解为一种近似的高维 Fuzzy 集的合成。这样,状态的合成 M_m 化为 $M_m: [0, 1]^m \to [0, 1], (x_1, x_2, \cdots, x_m) \mapsto M_m(x_1, x_2, \cdots, x_m)$,称之为标准综合函数。其中有一类重要的标准综合函数,它满足

$$\bigwedge_{j=1}^{m} x_j \leqslant M_m(x_1, x_2, \cdots, x_m) \leqslant \bigvee_{j=1}^{m} x_j \qquad (6.3.1)$$

我们称此类综合函数为可加型标准综合函数,简称为 ASM_m 函

数．除(6.3.1)外，ASM_m 函数还有一些基本要求，其中包括

(1) $X\leqslant Y\Rightarrow M_m(X)\leqslant M_m(Y)$

(2) $M_m(x_1, \cdots, x_m)$ 对每个变元连续．

以后，为了叙述上的方便，不妨限定 M_m 的定义域为 $(0, 1]^m$（在 $x_j=0$ 处用极限加以描述）．

例 6.3.1 下列函数都是 ASM_m 函数:

(1) $\wedge$: $(0, 1]^m\to[0, 1], (x_1, \cdots, x_m)\mapsto \bigwedge_{j=1}^{m} x_j$

(2) $\vee$: $(0, 1]^m\to[0, 1], (x_1, \cdots, x_m)\mapsto \bigvee_{j=1}^{m} x_j$

(3) $\sum$: $(0, 1]^m\to[0, 1], \sum(x_1, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m} w_j x_j$

（其中 $w_j\in[0,1]$ 且 $\sum_{j=1}^{m} w_j=1$，w_j 为 m 元函数，对每个变元连续）

(4) $M_m(x_1, \cdots, x_m)=\bigvee_{j=1}^{m}(a_j x_j)$ $(a_j\in[0,1], \sum_{j=1}^{m} a_j=1)$

(5) $M_m(x_1, \cdots, x_m)=\bigvee_{j=1}^{m}(a_j\wedge x_j)$ $(a_j\in[0,1], \sum_{j=1}^{m} a_j=1)$

(6) $M_m(x_1, \cdots, x_m)=(\prod_{j=1}^{m} x_j)^{\frac{1}{m}}$

(7) $M_m(x_1, \cdots, x_m)=(\frac{1}{m}\prod_{j=1}^{m} x_j^p)^{\frac{1}{p}}$ $(p>0)$

(8) $M_m(x_1, \cdots, x_m)=(\sum_{j=1}^{m} a_j x_j^p)^{\frac{1}{p}}$

$$(p>0, a_j\in[0,1], \sum_{j=1}^{m} a_j=1)$$

其中(3)是人们习惯采用的加权求和．这种综合函数具有良好的性质，便于应用．现在决策分析等领域采用的加权求和是常权加权求和，即 $w_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为常数．汪培庄先生首先提出了常数的不合理性并首开了变权综合研究[21]．

§4 惩罚型变权

如前所述，加权求和函数是最常用的 ASM_m 函数，它的一般形式为

$$\sum(x_1, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m} w_j x_j \tag{6.4.1}$$

一、变权综合的背景

人们最为熟悉的加权求和是(6.4.1)中 $w_j\ (j=1, 2, \cdots, m)$ 为常数 $w_j^{(0)}(0 \leqslant w_j^{(0)} \leqslant 1,\ \sum_{j=1}^{m} w_j^{(0)}=1)$ 的情形，此时称之为常权综合，诸 $w_j^{(0)}$ 叫做常权，$W^{(0)}=(w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \cdots, w_j^{(0)})^T$ 称为常权向量。

常权综合在一定程度上反映了事物关于各基本目标(因素)的综合优度，其常权反映了各基本目标(因素)的相对重要性，这比起单纯的取大(取小)综合函数而言要合理得多，因而在许多场合中被广泛采用。

然而，无论单目标优度的组态如何，一味采用常权向量加以综合在某些问题中会出现明显的不合理现象。

例 6.4.1 考虑某项工程设计方案，该方案是否付诸实施与两个重要因素有关：$f_1=$ 可行性，$f_2=$ 必要性。假定它们的重要程度相当，即权向量为 $W^{(0)}=(0.5, 0.5)^T$，$x_j\ (j=1, 2)$ 表示单因素优度，则方案的常权综合函数为

$$\sum(x_1, x_2)=M_2(x_1, x_2)=0.5x_1+0.5x_2 \tag{6.4.2}$$

若有两个方案 A 和 B，它们对应的状态向量依次为 $X^{(1)}=(0.5, 0.5)^T$ 和 $X^{(2)}=(0.1, 0.9)^T$，则有 $M_2^{(1)}=M_2^{(2)}=0.5$。但这明显与实际不符，因为方案 B 尽管很必要但几乎不可行故应该放弃，而方案 A 相对而言可行性和必要性均具备故应为选中

方案。

实际上，(6.4.2)相当于承认了因素之间的可替代性。但是，在实践中要考虑的因素是不可替代的。比如说，在学生成绩评定中，不能说用数学成绩100分来弥补语文成绩20分的不足而认为该学生合格。

也就是说，常权综合的不合理性首先在于它违背了决策中因素的不可替代性。

另一方面，我们来分析一下一般的二维 ASM_m 函数 M_2。

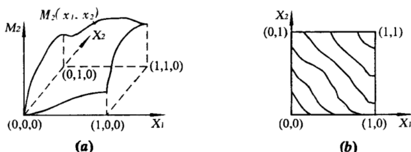


图 6.4.1 优度曲线与等优线

我们可以在 [0, 1] 中用等优线来反映优度分布情况。由 $M_2(x_1, x_2)=c$ ($c\in[0, 1]$) 构成 X_1OX_2 平面内的一族曲线，它们是 $M_2=c$ 和 $M_2=M_2(x_1, x_2)$ 的交线在 X_1OX_2 平面内的投影。特别当 $M_2(x_1, x_2)=w_1^{(0)}x_1+w_2^{(0)}x_2$ 时，优度曲面是过 (0, 0, 0) 与 (1, 1, 1)的平面，其倾斜方向和角度由权向量 $W^{(0)}$ 确定，其等优线为一族平行直线，等优线的法线方向即为 $W^{(0)}$ 的方向。

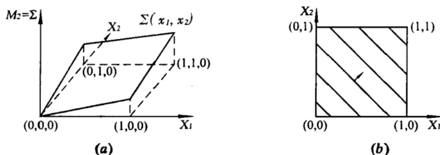


图 6.4.2 常权综合的优度曲面与等优线

我们用常权向量 $W^{(0)}=(w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \cdots, w_m^{(0)})^T$ 来体现因素的重要性．为了避免如(6.4.2)的不合理，降低 $X^{(2)}=(0.1, 0.9)^T$ 的评价，可行的做法是增加 x_1(最差的单因素优度或评价值)的权重。这是一种对缺点进行"惩罚"的综合形式。对此，我们给出体现这种"惩罚"作用的变权公理的定义，称之为惩罚型变权公理体系。

二、惩罚型变权的公理化定义及几类特款

定义 6.4.1 若 w_j: $(0, 1]^m \to [0, 1]$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 满足

(1) **归一性**: $\sum_{j=1}^{m} w_j(x_1, \cdots, x_m)=1$

(2) **连续性**: $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 关于每个变元连续。

(3) **惩罚性**: $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 关于变元 x_j 单调下降。

则称 $w_1, w_2, \cdots, w_m$ 为一组惩罚型变权。

注: ①若 $w_1, w_2, \cdots, w_m$ 为一组惩罚型变权，则 $\sum_m(x_1, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m} w_j(x_1, \cdots, x_m)$为 ASM_m 函数，称之为惩罚型变权综合函数；②(3)的作用在于当 x_j 减少时对应的权重增加而使综合值减少；③采用惩罚型变权综合函数进行状态综合时，要想取得较好的综合值(综合评价值)就必须每一个单因素状态(评价值)都不太低，因此惩罚型变权综合是一种惩罚缺点的评价方式，它正好能克服前面例子中出现的那种不合理现象。

汪培庄先生最早提出的变权经验公式[21]

$$\left.\begin{aligned} w_1(x_1, x_2) &= \frac{w_1^{(0)}x_2}{w_1^{(0)}x_2 + w_2^{(0)}x_1} \\ w_2(x_1, x_2) &= \frac{w_2^{(0)}x_1}{w_1^{(0)}x_2 + w_2^{(0)}x_1} \end{aligned}\right\} \quad (6.4.2)$$

即为一组惩罚型变权($m=2$). 对此我们可以进行推广到 m 维的情形,即

$$\left.\begin{aligned} w_1(x_1, \cdots, x_m) &= \frac{\eta_{1m}(x_1, x_m)}{1+\sum_{i=1}^{m-1}\eta_{im}(x_i, x_m)} = \frac{\frac{w_1^{(0)}}{x_1}}{\sum_{j=1}^{m}\frac{w_j^{(0)}}{x_j}} \\ w_2(x_1, \cdots, x_m) &= \frac{\eta_{2m}(x_2, x_m)}{1+\sum_{i=1}^{m-1}\eta_{im}(x_i, x_m)} = \frac{\frac{w_2^{(0)}}{x_2}}{\sum_{j=1}^{m}\frac{w_j^{(0)}}{x_j}} \\ &\cdots\cdots \\ w_{m-1}(x_1, \cdots, x_m) &= \frac{\eta_{(m-1)m}(x_{m-1}, x_m)}{1+\sum_{i=1}^{m-1}\eta_{im}(x_i, x_m)} = \frac{\frac{w_{m-1}^{(0)}}{x_{m-1}}}{\sum_{j=1}^{m}\frac{w_j^{(0)}}{x_j}} \\ w_m(x_1, \cdots, x_m) &= \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{m-1}\eta_{im}(x_i, x_m)} = \frac{\frac{w_m^{(0)}}{x_m}}{\sum_{j=1}^{m}\frac{w_j^{(0)}}{x_j}} \end{aligned}\right\} \quad (6.4.3)$$

其中 $\eta_{ij}=\dfrac{w_i^{(0)}x_j}{w_j^{(0)}x_i}$ $(i, j=1, 2, \cdots, m, i\neq j)$.

为了生成一组惩罚型变权,我们引入惩罚型均衡函数.

定义 6.4.2 若函数 B: $[0, 1]^m \to R$ 在 $(0, 1)^m$ 上有连续的偏导数且

$$(\forall 1\leqslant j\leqslant m)\ w_j(x_1,\ \cdots,\ x_m)=\frac{w_j^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_j}}{\sum\limits_{k=1}^{m} w_k^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_k}} \quad (6.4.4)$$

为一组惩罚型变权，则称 $B(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ 为**惩罚型均衡函数**.

定理 6.4.1 设 $g_j(t)\in C^2(0,1]$ 且 $g_j'(t)\geqslant 0$, $g_j''(t)\leqslant 0$ $(j=1,2,\ \cdots,\ m)$, 则 $B_1(x_1,\ \cdots,\ x_m)=\sum\limits_{j=1}^{m} g_j(x_j)$ 为惩罚型均衡函数.

证明 只须证

$$w_j(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)=\frac{w_j^{(0)}g_j'(x_j)}{\sum\limits_{k=1}^{m} w_k^{(0)}g_k'(x_k)}$$

具有惩罚性(归一性与连续性明显). 事实上

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(w_j^{(0)}g_j'(x_j)\Big/\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)}g_k'(x_k)\right)$$

$$=\frac{w_j^{(0)}g''(x_j)\sum\limits_{k=1}^{m} w_k^{(0)}g_k'(x_k)-[w_j^{(0)}]^2 g_j'(x_j)g_j''(x_j)}{[\sum w_k^{(0)}g_k'(x_k)]^2}$$

$$=\frac{w_j^{(0)}g_j''(x_j)}{\sum w_k^{(0)}g_k'(x_k)}\left[1-\frac{w_j^{(0)}g_j'(x_j)}{\sum\limits_{k=1}^{m} w_k^{(0)}g'(x_k)}\right]\leqslant 0$$

所以 $w_j(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ 对 x_j 单调下降.

定理 6.4.2 设 $h_j(t)\in C^2(0,1]^m$ 且 $h_j'(t)\geqslant 0$, $(\ln h_j(t))''\leqslant 0$ $(1\leqslant j\leqslant m)$, 则 $B_2(x_1,\ \cdots,\ x_m)=\prod\limits_{j=1} h_j(x_j)$ 为惩罚型均衡函数.

证明 只须证明

$$w_j(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)=w_j^{(0)}\frac{h_j'(x_j)}{h_j(x_j)}\Big/\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)}\frac{h_k'(x_k)}{h_k(x_k)}$$

$(j=1, 2, \cdots, m)$ 满足惩罚性，实际上

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}=$$

$$\frac{w_j^{(0)}(\ln h_j(x_j))''\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\dfrac{h_k'(x_k)}{h_k(x_k)}-[w_j^{(0)}]^2\dfrac{h_j'(x_j)}{h_j(x_j)}(\ln h_j(x_j))''}{\left[\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\dfrac{h_k'(x_k)}{h_k(x_k)}\right]^2}$$

$$=\frac{w_j^{(0)}(\ln h_j(x_j))''}{\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\dfrac{h_k'(x_k)}{h_k(x_k)}}\left[1-\frac{w_j^{(0)}\dfrac{h_j'(x_j)}{h_j(x_j)}}{\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\dfrac{h_k'(x_k)}{h_k(x_k)}}\right]\leqslant 0$$

所以 $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 对 x_j 单调下降．故 $w_j(x_1, \cdots, x_m)(j=1, 2, \cdots, m)$ 为一组惩罚型变权，故 $B_2(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为惩罚型均衡函数．

定义 6.4.3 设 $B(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为惩罚型均衡函数，则称

$$w_j(x_1, \cdots, x_m)=w_j^{(0)}\frac{\partial B}{\partial x_j}\Big/\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\frac{\partial B}{\partial x_k} \tag{6.4.5}$$

$(j=1, 2, \cdots, m, \sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}=1, w_k^{(0)}\geqslant 0)$ 为 $B(x_1, \cdots, x_m)$ 的（惩罚型）变权模式．

定理 6.4.3 设 $B(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为均衡函数，$\varphi(t)$ 在 B 的值域上可导且 $\varphi'(t)>0$，则 $(\varphi\circ B)(x_1, x_2, \cdots, x_m)+c$（$c$ 为常数）也为均衡函数且 $B(x_1, \cdots, x_m)$ 与 $(\varphi\circ B)(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 具有相同的变权模式．

证明 事实上，由

$$\frac{\partial(\varphi\circ B)}{\partial x_j}=\varphi'(B)\cdot\frac{\partial B}{\partial x_j}$$

知

$$\frac{w_j^{(0)}\dfrac{\partial(\varphi\circ B)}{\partial x_j}}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\dfrac{\partial(\varphi\circ B)}{\partial x_k}}=\frac{w_j^{(0)}\varphi'(B)\dfrac{\partial B}{\partial x_j}}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\varphi'(B)\dfrac{\partial B}{\partial x_k}}=\frac{w_j^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_j}}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_k}}$$

故定理得证。 证毕！

定理 6.4.4 以下函数均为惩罚型均衡函数

$$(1)\ \sum\nolimits_{\alpha}(x_1,\ \cdots,\ x_m)=\sum_{j=1}^{m}x_j^{\alpha}\qquad(0<\alpha\leqslant 1)\tag{6.4.6}$$

$$(2)\ \prod\nolimits_{\alpha}(x_1,\ \cdots,\ x_m)=\prod_{j=1}^{m}x_j^{\alpha}\qquad(\alpha>0)\tag{6.4.7}$$

$$(3)\ \sum\nolimits_{p}(x_1,\ \cdots,\ x_m)=\sum_{j=1}^{m}\Big[\frac{1}{6}x_j^3-\frac{1}{2}p_jx_j^2+\Big(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_j\Big)t\Big]$$

$$(p=(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m)^T,\ 1\leqslant p_j\leqslant\frac{8}{3},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\tag{6.4.8}$$

证明 (1)取 $g_j(t)=t^{\alpha}$ $(0<\alpha\leqslant 1)$，则 $g_j'(t)=\alpha t^{\alpha-1}$ 而 $g_j''(t)=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}\leqslant 0$，故 $g_j(t)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 满足定理 6.4.1 的条件，由定理 6.4.1 知 $\sum_{\alpha}(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ 为惩罚型均衡函数。

(2)取 $h_j(t)=t^{\alpha}$ $(\alpha>0)$，则 $(\ln h_j(t))'=(\alpha\ln t)'=\dfrac{\alpha}{t}$，$(\ln h_j(t))''=-\dfrac{\alpha}{t^2}<0$，而 $h_j'(t)=\alpha t^{\alpha-1}>0$，故 $h_j(t)\,(j=1,2,\cdots,m)$ 满足定理 6.4.2，故 $\prod_{\alpha}(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ 为惩罚型均衡函数。

(3) 取 $g_j(t)=\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{2}p_jt^2+\Big(\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}p_j\Big)t$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ p_j\leqslant 0)$，则 $g_j'(t)=\dfrac{1}{2}t^2-p_jt+\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}p_j$，而 $g_j''(t)=t-p_j\leqslant 0$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，从而 $g_j'(t)$ 为减函数，故 $g_j'(t)\geqslant g'(1)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-p_j+\frac{1}{2}p_j=\frac{8}{6}-\frac{1}{2}p_j\geqslant\frac{8}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=0$$

$(0<t\leqslant 1)$。故 $g_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 满足定理 6.4.1 条件。证毕！

(6.4.6)式对应的变权模式为

$$w_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)=w_j^{(0)}x_j^{\alpha-1}\Big/\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}x_k^{\alpha-1} \tag{6.4.9}$$

$(j=1, 2, \cdots, m, 0<\alpha\leqslant 1)$

所确定的变权综合为变权综合模式 I:

$$V_1(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m}w_j^{(0)}x_j^{\alpha}\Big/\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}x_k^{\alpha-1} \tag{6.4.10}$$

特别地，当 $\alpha=1$ 时

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\sum w_j^{(0)}x_j \tag{6.4.11}$$

即为常数综合模式.

(6.4.7)式对应的变权模式为

$$w_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\frac{w_j^{(0)}}{x_j\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}x_k^{-1}} \tag{6.4.12}$$

$(j=1, 2, \cdots, m)$, 此即 (6.4.3)。它所确定的变权综合为变权综合模式 II:

$$V_2(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m}\frac{w_j^{(0)}}{\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}x_k^{-1}} \tag{6.4.13}$$

由上述定理可以看出，均衡函数中有两种基本型，即

$\sum$ 型: $\sum_{j=1}^{m}g_j(x_j)$ $(g_j''(t)\leqslant 0, g_j'(t)>0)$

$\prod$ 型: $\prod_{j=1}^{m}h_j(x_j)$ $((\ln h(t))''\leqslant 0, h_j'(t)>0)$

例 6.4.2 顾客购买电视机时，从使用寿命(f_1)、价格(f_2)、外观设计(f_3)、操作(f_4)、售后服务(f_5)、安全性能(f_6)和质量(f_7)七个因素去衡量，根据问卷调查结果，七个因素的权重依次为0.1、0.2、0.1、0.15、0.05、0.1、0.3，记为权向量$W^{(0)}=(w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \cdots, w_7^{(0)})^T=(0.1, 0.2, 0.1, 0.15, 0.05, 0.1, 0.3)^T$，而对6个品牌电视机的单因素评价如表 6.4.1。

表 6.4.1

分因素评价 \ 品牌	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
A	0.7	0.5	0.8	0.4	0.5	0.8	0.7
B	0.1	0.5	0.5	0.6	0.7	0.8	0.5
C	0.3	0.5	0.3	0.6	0.7	0.8	0.5
D	0.8	0.4	0.8	0.6	0.8	0.8	0.7
E	0.8	0.2	0.5	0.4	0.6	0.7	0.9
F	0.8	0.7	0.1	0.8	0.8	0.8	0.9

采用变权综合模式 II，计算得

$$V_A=0.5895 \quad V_B=0.3779 \quad V_C=0.4732$$

$$V_D=0.6188 \quad V_E=0.4426 \quad V_F=0.4719$$

所以品牌 D 综合评价最好。

变权综合与常权综合比较见表 6.4.2。

表 6.4.2

综合模式 \ V 品牌	A	B	C	D	E	F
变权综合	0.8500	0.5150	0.5150	0.6600	0.6000	0.7400
变权综合 I	0.6076	0.4597	0.4943	0.6385	0.5226	0.6380
变权综合 II	0.5895	0.3779	0.4732	0.6188	0.4426	0.4719

注：变权综合 I 中 $\alpha=\frac{1}{2}$，按(6.4.10)式计算。

按常权综合，则排序为A,F,D,E,C,B；按变权综合I，则排序为D,F,A,E,C,B；按变权综合Ⅱ，则排序为D,A,C,F,E,B。因此，变权综合I是常权综合与变权综合Ⅱ的折衷。若取 $\alpha>\frac{1}{2}$，则相应的排序逐次趋向常权综合排序。若取 $\alpha<\frac{1}{2}$，则相应的排序逐次趋向变权综合Ⅱ的排序。换言之，常权综合与变权综合Ⅱ是变权综合的两极。常权综合忽视了因素间的平衡关系，而变权综合Ⅱ最注重因素间平衡关系。事实上，对(6.4.10)式两边取极限可得

$$\lim_{\alpha\to 1^-} V_1(x_1,\ \cdots,\ x_m)=V_0(x_1,\ \cdots,\ x_m)$$

$$\lim_{\alpha\to 1^+} V_1(x_1,\ \cdots,\ x_m)=V_2(x_1,\ \cdots,\ x_m)$$

一般来讲，评判者较保守的情况下 $\alpha<\frac{1}{2}$，即对诸因素的平衡问题考虑得较多；评判者较开明的情况下，$\alpha>\frac{1}{2}$，即比较能容忍某方面的缺陷。多数而言，取 $\alpha=\frac{1}{2}$ 为宜。即本例中六种品牌电视机的评判优先次序应为D, F, A, E, C, B.

例 6.4.3 学生成绩评定在教学管理中具有重要意义。一般的做法是求平均分，但这不能体现各门课程的相对重要性。即使按加权平均也存在问题，例如某两名数学专业学生甲和乙第一学期考试成绩为

表 6.4.3

科目 / 学生	数学分析	高等代数	解析几何	中共党史	英　语
甲	85	90	70	90	75
乙	100	90	80	40	80

按学分制，赋予各门课程的权重依次为 0.4, 0.3, 0.1, 0.1, 0.1,

则按常权综合，他们的综合成绩为

$$V_{甲}=84.5 \qquad V_{乙}=87.0$$

显然乙的综合成绩比甲高．但这是不符合实际的．因为乙是不合格学生．尽管他的重要课程成绩均高于或等于甲的成绩，但他有一门成绩太低(不及格)．

所以，学生成绩评定应采用变权综合方式．

设有 n 个学生，序号依次为 1, 2, …, n，在某时段内修毕 m 门课程 A_1、A_2、…、A_m，课程 A_j 的总评成绩为 x_j'，课程 A_j 的权重为 $w_j^{(0)}$．

$$w_j^{(0)}=\frac{\text{课程 } A_j \text{ 的学分}}{\text{该 } m \text{ 门课程的总学分}}$$

($w_j^{(0)}$ 也可以用其他方法确定)．

现以 m 门课程作为该时段综合成绩的因素，综合成绩作为决策变量，而第 j 个因素(课程 A_j)的量标为 $x_j=\frac{x_j'}{100}$ (x_j' 为第 j 门课 A_j 的 100 分制考分)，对 $x_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 作变权综合．

现以某校某学期成绩综合评价为例，列举 15 名学生成绩如表 6.4.4．

根据学分制，《政治》1 个学分，《体育》1 个学分，《教育学》2.5 个学分，《初等数论》4 个学分，《计算机运用基础》5 个学分，《中学数学教材教法》3.5 个学分．此六门课程依次记为 A_1, A_2, …, A_6，故

$W^{(0)}=(w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \cdots, w_6^{(0)})^T=(0.06, 0.06, 0.14, 0.24, 0.29, 0.21)^T$

用 $\alpha=0$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$ 三种模式与等权平均进行综合的结果见表 6.4.5，对应的排名见表 6.4.6．

表 6.4.4

课程 学号	政治	体育	教育学	初等数论	计算机运用基础	中学数学教材教法
1	80	47	60	86	60	81
2	85	80	72	80	73	85
3	80	65	79	94	62	78
4	75	65	79	85	73	72
5	89	65	68	88	61	83
6	73	62	71	91	68	74
7	76	70	82	90	67	72
8	50	90	76	80	71	68
9	61	68	78	92	62	70
10	72	67	52	89	40	69
11	62	64	67	79	60	71
12	74	58	63	93	62	75
13	72	75	68	90	60	80
14	80	70	64	85	71	82
15	76	68	69	84	67	70

表 6.4.5

学号 评价值 综合模式	1	2	3	4	5	6	7	8
M_1	0.541	0.782	0.688	0.762	0.750	0.751	0.764	0.731
$M_{\frac{1}{2}}$	0.693	0.781	0.745	0.760	0.739	0.746	0.759	0.725
M_0	0.686	0.778	0.726	0.758	0.732	0.748	0.753	0.734
等权综合	0.690	0.792	0.763	0.748	0.757	0.732	0.762	0.725

续表

综合模式 \ 评价值 \ 学号	9	10	11	12	13	14	15
M_1	0.734	0.631	0.682	0.728	0.573	0.762	0.736
$M_{\frac{1}{2}}$	0.725	0.602	0.679	0.718	0.734	0.757	0.729
M_0	0.730	0.587	0.688	0.725	0.739	0.722	0.736
等权综合	0.718	0.648	0.672	0.708	0.742	0.753	0.723

表 6.4.6

综合模式 \ 学号 \ 名次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	十五
M_1	2	7	4	14	6	5	15	9	8	12	3	11	10	13	1
$M_{\frac{1}{2}}$	2	4	7	14	6	3	5	13	15	9	8	12	1	11	10
M_0	2	4	7	3	6	13	15	8	5	9	12	14	11	1	10
等权综合	2	3	7	5	14	4	13	6	8	15	9	12	1	11	10

§5 激励型变权与混合型变权

惩罚型变权是一种对缺点进行惩罚的综合方式，它有一定的适用范围．比如在人才评价中，中低级人才主要要看到他们的一技之长，此时应该予以激励，即加大优点的权重．又如，因素 f_j 表示"工作成绩"、按照"价值梯度"原理，工作成绩越大付出的努力也就越大，工作"平平"是最容易做到的，要想工作得更好需要有"加速型"的努力．换言之，f_j 的状态 x_j 越大，x_j 的权重亦随之增高．为此，我们引入激励型变权．将惩罚型变权与激励型变权加以混合即提出混合型变权．

一、激励型变权

定义 6.5.1 若 w_j: $(0, 1]^m \to [0, 1]$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 满足:

(1) **归一性**: $\sum_{j=1}^{m} w_j(x_1, \cdots, x_m)=1$

(2) **连续性**: $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 对每个变元连续

(3) **激励性**: $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 关于变元 x_j 单调上升

则称 $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 为一组**激励型变权**。

定义 6.5.2 设 B: $(0, 1]^m \to R$, 若 $B(x_1, \cdots, x_m)$ 具有连续偏导数且

$$w_j(x_1, \cdots, x_m)=\frac{w_j^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_j}}{\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_k}} \quad (j=1, 2, \cdots, m) \quad (6.5.1)$$

为一组激励型变权,则称 $B(x_1, \cdots, x_m)$ 为**激励型均衡函数**; 称 (6.5.1) 为 $B(x_1, \cdots, x_m)$ 的**(激励型)变权模式**,它所导出的 ASM_m 函数为

$$V(x_1, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m}\left(w_j^{(0)}\frac{\partial B}{\partial x_j}\Big/\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)}\frac{\partial B}{\partial x_k}\right)x_j$$

容易验证,下列函数为激励型均衡函数:

(1) $B_\alpha(x_1, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m} x^\alpha \quad (\alpha>1)$

(2) $B_p(x_1, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{6}x_j^3-\frac{1}{2}p_j x_j^2+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_j\right)x_j\right]$

$(p=(p_1, p_2, \cdots, p_m)^T,\ -\frac{5}{3}\leqslant p_j\leqslant 0,\ j=1, 2, \cdots, m)$.

二、混合型变权

所谓"混合型变权"是指该变权关于某些因素具有惩罚性，而对另外一些因素具有激励性．无妨假定关于 $f_1, f_2, \cdots f_l$ 是惩罚的，关于 $f_{l+1}, \cdots, f_m$ 是激励的 $(0\leqslant l\leqslant m)$．在混合性意义下，变权公理具有如下形式：

定义 6.5.3 若 w_j: $(0, 1]^m \to [0, 1]$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 满足：

(1) **归一性**：$\sum\limits_{j=1}^{m} w_j(x_1, \cdots, x_m)=1$

(2) **连续性**：$w_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 关于每个变元连续

(3) **混合性**：$w_j(x_1, \cdots, x_m)$ 关于 x_j 单调下降，且仅当 $1\leqslant j\leqslant l$, $w_j(x_1, \cdots, x_m)$；关于 x_j 单调增加当且仅当 $l+1\leqslant j\leqslant m$．

则称 $w_j(x_1,\cdots,x_m)(j=1,2,\cdots,m)$ 为一组**混合型变权**；称 l 为**惩罚数**，$m-l$ 为**激励数**．

显然，当 $l=m$ 时，混合变权退化为惩罚型变权；当 $l=0$ 时，混合变权退化为激励型变权．

类似地，我们可以定义混合型均衡函数．

例 6.5.1 下列函数为混合型均衡函数：

(1) $B(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\sum\limits_{j=1}^{l} x_j^{\alpha}+\sum\limits_{j=l+1}^{m} x_j^{\beta}$ $(0<\alpha\leqslant 1, \beta>1)$

(2) $B(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\sum\limits_{j=1}^{m}[\frac{1}{6}x_j^3-\frac{1}{2}p_j x_j^2+(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_j)x_j]$

（当 $1\leqslant j\leqslant l$ 时，$-\frac{5}{3}\leqslant p_j\leqslant 0$；当 $l<j\leqslant m$ 时，$1\leqslant p_j\leqslant \frac{8}{3}$）

我们很容易给出 $\sum$ 型混合型均衡函数的一般要求．

定理 6.5.1 若 $g_j(t)\in C^2[0, 1]$，且 $g_j'(t)\geqslant 0$ $(j=1, 2, \cdots, m)$，而当 $1\leqslant j\leqslant l$ 时 $g_j''(t)\leqslant 0$，当 $l<j\leqslant m$ 时，$g_j''(t)\geqslant 0$，则

$B(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m} g_j(x_j)$ 为混合型均衡函数。

证明 只须证明

$$w_j(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\frac{w_j^{(0)}\frac{\partial B}{\partial x_j}}{\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)}\frac{\partial B}{\partial x_k}} \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

为一组混合型变权。事实上，由 $\frac{\partial B}{\partial x_j}=g_j'(x_j)$，故

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}=\frac{w_j^{(0)}g_j''(x_j)\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)}g_k'(x_k)-[w_j^{(0)}]^2 g_j'(x_j)\,g_j''(x_j)}{[\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)}\,g_k'(x_k)]^2}$$

$$=\frac{w_j^{(0)}\,g_j''(x_j)}{\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)}\,g_k'(x_k)}\left[1-\frac{w_j^{(0)}g_j'(x_j)}{\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)}\,g_k'(x_k)}\right]\begin{cases}\leqslant 0 & 1\leqslant j\leqslant l\\ \geqslant 0 & l<j\leqslant m\end{cases}$$

所以，当 $1\leqslant j\leqslant l$ 时，$w_j(x_1, \cdots, x_m)$ 为 x_j 的减函数；当 $l<j\leqslant m$ 时，$w_j(x_1, \cdots, x_m)$ 关于 x_j 单调增加。至于归一性与连续性，勿庸证明。

三、混合变权的 Weber-Fechner 特性

设 $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 为一组混合型变权，假定 $w_1(x_1,\cdots,x_m)$, $\cdots$, $w_l(x_1,\cdots,x_m)$ 为激励型，$w_{l+1}(x_1,\cdots,x_m)$, $\cdots$, $w_m(x_1,\cdots,x_m)$ 为惩罚型，我们按下述方式构造综合函数

$$\left.\begin{aligned} V(x_1,\cdots,x_m)&=\psi\left[\frac{1+\sum_{j=1}^{m}w_j(x_1,\cdots,x_m)x_j}{1+\sum_{j=l+1}^{m}w_j(x_1,\cdots,x_m)x_j}-1\right] \\ \psi(t)&=\begin{cases} t & t\geqslant 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (6.5.2)$$

若令

$$e=\sum_{j=1}^{l}w_j(x_1,\cdots,x_m)x_j,\quad h=\sum_{j=l+1}^{m}w_j(x_1,\cdots,x_m) \quad (6.5.3)$$

则 (6.5.2) 式化为

$$V(x_1,\cdots,x_m)=\psi\left(\frac{1+e}{1+h}-1\right)=\psi\left(\frac{e-h}{1+h}\right) \quad (6.5.4)$$

当 h 很小时，$V(x_1,\ \cdots,\ x_m)\approx\psi(e-h)$，这意味着 $V(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ 的值由 e 和 h 之差来决定，并且 e 在其中起主导作用．另外，当 h 很小时，亦可视

$$V(x_1,\ \cdots,\ x_m)\approx\psi\left(\frac{e}{1+h}\right)=\frac{e}{1+h} \quad (6.5.5)$$

现在我们从另一个角度来分析一下 (6.5.4) 式．令

$$e=\xi u,\quad h=\eta u \quad (6.5.6)$$

则当 $\xi<\eta$ 时，(6.5.4) 式变为

$$V(x_1,\cdots,x_m)=\frac{(\xi-\eta)u}{1+\eta u}=\frac{\xi-\eta}{2\eta}\left[1+\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\log_2\eta u\right)\right] \quad (6.5.7)$$

其中 $\mathrm{th}x$ 为 x 的双曲正切．(6.5.7) 式与 Weber-Fechner 定律取得了一致，即该式将 $\mathrm{th}x$ 所表达的特性加到了具有对数特性的 Weber-Fechner 规则上．Weber - Fechner 定律被广泛用来表达生理学、心理学中与感觉系统有关的输入输出之间的非线性关系．实际上，变权在本质上是生理学、心理学某种规律的体现．因此，(6.5.7) 式意味着变权分析具有深刻的心理学背景．

§6 折衷型变权

混合型均衡函数及其导出的混合型变权在一定程度上体现了"既惩恶又扬善"的评价思想．其作用是对某些因素进行惩的同时对另一些因素进行激励．因此，在某些方面没有明显缺点且在另一些方面很优秀的对象将取得较好的评价值．如果这是对人才评价的话，则是专才评价模式．比如说，在录取研究生时，一般优先考虑外语和政治不要太低而与研究方向相关的专业课特别优秀的考生．这相当于对"外语成绩"和"政治成绩"这两个因素使用惩罚而对"专业课成绩"采用激励．

然而，就人才评价而言，除特定的人才评价外，评价体系应该有利于具有各种专长的人才成长．特别是大量的中、低级人才评价更应看到他们的一技之长而不管这一技之长是哪一方面的．这样，在变权综合中固定对某些因素进行惩罚或激励是不够全面的．比较合理的是对每一因素设定一个状态水平(可以称作"及格水平")，低于这个水平予以惩罚，高于这个水平则予以激励．不同的因素，这个水平可以不同．一般相对重要的因素及格水平较高，而较次要的因素及格水平可以低一点．为此，我们提出折衷型变权．

定义 6.6.1 设 $p\in[-1,1]^m$，若 w_j: $(0,1]^m\to[0,1]$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 满足

(1) **归一性**: $\sum_{j=1}^{m} w_j(x_1,\cdots,x_m)=1$

(2) **连续性**: $w_j(x_1,\cdots,x_m)$ 对每个变元都是连续的

(3) **折衷性**: 当 $x_j\leqslant p_j\leqslant 1$ 时，$w_j(x_1,\cdots,x_m)$ 对 x_j 单调减少，当 $x_j\geqslant p_j\geqslant -1$ 时，$w_j(x_1,\cdots,x_m)$ 对 x_j 单调增加，则称 $w_j(x_1,\cdots,x_m)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 为一组**折衷型变权**，$p=(p_1,$

$p_2, \cdots, p_m)^T$称为这组变权$w_j(x_1, \cdots, x_m)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$的**激励策略**，p_j称为因素f_j的**及格水平或激励-惩罚拐点**$(j=1, 2, \cdots, m)$.

我们注意到折衷型变权是最为广泛的变权，这是因为：(i) 当$\forall 1\leqslant j\leqslant m$, $p_j=1$时，它退化为惩罚型变权；(ii) 当$\forall 1\leqslant j\leqslant m$, $-1\leqslant p_j\leqslant 0$时，它退化为激励型变权；(iii) 当$1\leqslant j\leqslant l$时$p_j=1$且当$l<j\leqslant m$时$-1\leqslant p_j\leqslant 0$, 则它退化为混合型变权.

定义 6.6.2 设B: $(0, 1]^m\times[-1, 1]^m\rightarrow R, (x, p)\mapsto B(x,p)$具有关于$x_j$的连续偏导数$(j=1, 2, \cdots, m)$且

$$w_j(x_1, \cdots, x_m)=\frac{w_j^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_j}}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_k}}$$

为一组以$p=(p_1, \cdots, p_m)^T$为激励策略的折衷型变权，则称$B(x, p)$为以p为策略的**折衷型均衡函数**.

定理 6.6.1 设$u_j(t)$ $(j=1,2, \cdots, m)$在$(0, 1)$上二阶可导，且满足

(1) $u_j'(t)\geqslant 0$

(2) 当$t<p_j$时，$u_j''(t)\leqslant 0$; 当$t>p_j$时$u_j''(t)\geqslant 0$,

则$B(x_1, \cdots, x_m)=\sum\limits_{j=1}^{m}u_j(x_j)$为以$p=(p_1, \cdots, p_m)^T$为策略的均衡函数(其中$\|p\|\leqslant m$)

这个定理是容易证明的. 事实上

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{w_j^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_j}}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}\dfrac{\partial B}{\partial x_k}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{w_j^{(0)}u_j'(x_j)}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}u_k'(x_k)}\right)$$

$$= \frac{w_j^{(0)} u_j''(x_j)\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k) - [w_j^{(0)}]^2 u_j'(x_j) u_j''(x_j)}{[\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)]^2}$$

$$= \frac{w_j^{(0)}\sum_{k\neq j} w_k^{(0)} u_k'(x_k)}{[\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)]^2} u_j''(x_j)$$

而
$$\frac{w_j^{(0)}\sum_{k\neq j} w_k^{(0)} u_k'(x_k)}{[\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)]^2} > 0$$

且
$$u_j''(t)\begin{cases}\leqslant 0 & 0<t<p_j\\ \geqslant 0 & p_j<t<1\end{cases}$$

所以当 $0<x_j<p_j$ 时，$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}\leqslant 0$，即 $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ 关于 x_j 为减函数。

当 $p_j<x_j<1$ 时，$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}\geqslant 0$，即 $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ 关于 x_j 为增函数。

推论 6.6.1 设

$$u_j(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}p_j t^2+(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_j)t \tag{6.6.1}$$

$(j=1, 2, \cdots, m$，其中 $-1\leqslant p_j\leqslant 1)$

则 $B_p(x_1, \cdots, x_m)=\sum_{j=1}^{m}u_j(x_j)$ 为以 $p=(p_1, \cdots, p_m)^T$ 为策略的折衷型均衡函数。

事实上，此时

$$u_j'(t)=\frac{1}{2}t^2-p_j t+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_j$$

$$u''(t)=t-p_j \begin{cases} <0 & 0<t<p_j \\ >0 & p_j<t<1 \end{cases}$$

$$u_j(0)=0 \quad u_j(1)=1$$

配方得，对 $-1\leqslant p_j\leqslant 1$ 有

$$u_j'(t)=\frac{1}{2}(t-p_j)^2+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_j-\frac{1}{2}p_j^2$$

$$=\frac{1}{2}(t-p_j^2)+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}(1-p_j)p_j>0$$

故 $u_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 满足定理 6.6.1 之要求.

按(6.6.1)式给出的 $u_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 给出的 $B(x_1, \cdots, x_m)=\sum\limits_{j=1}^{m}u_j(x_j)$ 所确定的折衷型变权为

$$w_j(x_1,\cdots,x_m)=\frac{w_j^{(0)}(\frac{1}{2}x_j^2-p_jx_j+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_j)}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}(\frac{1}{2}x_k^2-p_kx_k+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_k)} \quad (6.6.2)$$

$$(j=1, 2, \cdots, m)$$

若取 $p_j=p_0(j=1, 2, \cdots, m)$, 则 (6.6.2) 式化为

$$w_j(x_1,\cdots,x_m)=\frac{w_j^{(0)}(\frac{1}{2}x_j^2-p_0x_j+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_0)}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}(\frac{1}{2}x_k^2-p_0x_k+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}p_0)} \quad (6.6.3)$$

$$(j=1, 2, \cdots, m)$$

特别，当 $p_j=\frac{1}{2}$ $(j=1, 2, \cdots, m)$, 则(6.6.3)又化为

$$w_j(x_1,\cdots,x_m)=\frac{w_j^{(0)}(\frac{1}{2}x_j^2-\frac{1}{2}x_j+\frac{13}{12})}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}(\frac{1}{2}x_k^2-\frac{1}{2}x_k+\frac{13}{12})}(j=1,2,\cdots,m)$$

§7 变权的一般理论与多目标决策

一、变权的一般概念与定义

变权分析是我国著名学者汪培庄教授于80年代率先提出的一种新的综合决策方法[21]. 李洪兴在参考文献[12]中第一次引入了变权的公理化定义[2],随即又将这一定义推广为混合型变权使之更一般化并研究了变权与 Weber - Fechner 定律的关系[13]. 我们在参考文献 [18] 中较深入地研究了均衡函数从而给出了一大类后来被称之为惩罚型的变权. 文献[19]将变权分析的研究进一步深入,指出了变权分析与效用理论的关系并首次提出了折衷型变权这一普适概念,从而使变权的一般概念逐步明晰起来[19]. 文献[20]中给出了某类折衷型变权的激励策略的特殊解法,文献[22]给出了折衷型变权的较一般的定义. 文献[23, 24, 25]等给出了变权的一些具体应用.

在上述文献的基础上,本节将给出折衷型变权的公理化结构并研究共轭变权、因素组态的协同度等.

下面先给出变权的一般概念与变权的基本类型.

设 $I_m=\{(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T|0\leqslant x_j\leqslant 1, j=1, 2, \cdots, m\}$ 为 R^m 中的单位正方体, I_m^+ 为 I_m 的内部,我们记 $0=(0, 0, \cdots, 0)^T$, $e=(1, 1, \cdots, 1)^T$, $x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$, $p=(p_1, p_2, \cdots, p_m)^T$ 均为 m 维列向量; $w(x =(w_1(x), w_2(x), \cdots, w_m(x))^T$ 为 m 维函数列向量.

定义 6.7.1 设 $p\in I_m$, $w(x)\in C^1(I_m^+)$. 若 $w(x)$ 满足:

(1) $w(x)\geqslant 0$

(2) $e^T w(x)=1$

(3) $\forall j\in\{1, 2, \cdots, m\}$, 有

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}\begin{cases}\leqslant 0 & x_j<p_j\\ \geqslant 0 & x_j>p_j\end{cases}$$

(4) $\forall j\in\{1, 2, \cdots, m\}$，有

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_k}{\partial x_j}x_k+w_j>0$$

则称 $w(x)$ 为以 p 为激励策略的变权，简称变权；称 p 为变权 $w(x)$ 的激励策略；称函数 $V_p(x)=x^Tw(x)$ 为变权综合函数．若 $w(x)$ 除 (1)～(4) 外还满足

(5) $\lim\limits_{x_j\to 0^+}w_j(x)=1\quad(j=1, 2, \cdots, m)$

则称 $w(x)$ 为强惩罚变权，简称 (s, w) 型变权．若 $w(x)$ 除 (1)～(4) 外还满足

(6) $\lim\limits_{x_j\to 1^-}w_j(x)=1\quad(j=1, 2, \cdots, m)$

则称 $w(x)$ 为强激励变权，简称为 (w, s) 型变权．

若变权 $w(x)$ 的激励策略 $p=e$，则称 $w(x)$ 为惩罚型变权，简称为 imp 型变权；若 $w(x)$ 的激励策略 $p=0$，则称 $w(x)$ 为激励型变权，简称为 pen 型变权；若 $p\in\{0, 1\}^m$，则称 $w(x)$ 为混合型变权，简称为 mix 型变权．

例如文献[18] 中给出的变权 $w(x)$:

$$w_j(x_1, x_2,\cdots,x_m)=\frac{w_j^{(0)}x_j^{\alpha-1}}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}x_k^{\alpha-1}}\tag{6.7.1}$$

$(0<\alpha<1)$ 即为 imp 型且 (s, w) 的变权．事实上，由于

$$\frac{\partial}{\partial x_l}[x^Tw(x)]=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial w_j}{\partial x_l}x_j+w_l=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}w_j^{(0)}x_j^{\alpha}}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}x_k^{\alpha-1}}\right]$$

$$=\frac{\alpha w_i^{(0)}x_i^{\alpha-1}[\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}x_k^{\alpha-1}]-[\sum_{j=1}^{m}w_j^{(0)}x_i^{\alpha}]\cdot\ w_i^{(0)}(\alpha-1)x_i^{\alpha-2}}{[\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}x_k^{\alpha-1}]^2}$$

$$=\frac{\alpha(w_i^{(0)}x_i^{\alpha-1}\sum_{j=1}^{m}w_j^{(0)}x_j^{\alpha-1})+(1-\alpha)(w_i^{(0)}x_i^{\alpha-2}\sum_{j=1}^{m}w_j^{(0)}x_j^{\alpha})}{[\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}x_k^{\alpha-1}]^2}>0$$

故条件(4)成立. 另外，由文献[3]知 $p=0$ 且当 $x_j\to 0^+$ 时

$$\lim_{x_j\to 0^+}w_j=\lim_{x_j\to 0^+}\frac{w_j^{(0)}x_j^{\alpha-1}}{\sum_{k\neq j}w_k^{(0)}x_k^{\alpha-1}+w_j^{(0)}x_j^{\alpha-1}}=1$$

所以 $w(x)$ 为 $(s,\ w)$ 型变权.

定理 6.7.1 若 $w(x)$ 为以 p 为激励策略的变权，则 $\overline{w}(x)=w(e-x)$ 为以 $e-p$ 为激励策略的变权；若 $w(x)$ 为 $(s,\ w)$ 型变权，则 $\overline{w}(x)$ 为 $(w,\ s)$ 型.

证明 $\overline{w}(x)=(\overline{w}_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m),\ \overline{w}_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m),\ \cdots,\ \overline{w}_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m))^T=(w_1(1-x_1,\ 1-x_2,\ \cdots,\ 1-x_m),\ w_2(1-x_1,1-x_2,\cdots,1-x_m),\cdots,w_m(1-x_1,\ 1-x_2,\ \cdots,\ 1-x_m))^T$. 显然 $\overline{w}(x)$ 满足变权定义中的(1)和(2)，$w(x)$ 以 p 为激励策略故

$$\frac{\partial w_j}{\partial u_j}\begin{cases}<0 & u_j<p_j\\ >0 & u_j>p_j\end{cases}$$

令 $u_j=1-x_j$，则

$$\frac{\partial \overline{w}_j}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_j}{\partial u_k}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_j}=-\frac{\partial w_j}{\partial u_j}\begin{cases}>0 & u_j<p_j\\ <0 & u_j>p_j\end{cases}$$

即

$$\frac{\partial \overline{w}_j}{\partial x_j}\begin{cases}<0 & x_j<1-p_j\\ >0 & x_j>1-p_j\end{cases}$$

即(3)成立．又因为

$$V_{\bar{p}}(x)=x^T\bar{w}(x)=x^Tw(e-x)=1-[1-x^Tw(e-x)]=1-[e^T w(e-x)-x^Tw(e-x)]=1-(e-x)^Tw(e-x)=1-V_p(e-x)$$

(这里 $\bar{p}=e-p$)，所以

$$\frac{\partial V_{\bar{p}}}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{w}_k}{\partial x_j}+\bar{w}_j(x)=-\frac{\partial V_p}{\partial u_j}\cdot(-1)=\frac{\partial V_p}{\partial u_j}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_k}{\partial u_j}+w_j(u)>0$$

故(4)成立．由此可知 $\bar{w}(x)$ 为以 $e-p$ 为激励策略的变权．

又若 $w(x)$ 为 $(s,\ w)$ 型，则 $\lim\limits_{x_j\to 0^+} w_j(x)=1$．从而 $\lim\limits_{x_j\to 1^-}\bar{w}_j(x)=\lim\limits_{1-x_j\to 0^+} w_j(e-x)=\lim\limits_{u_j\to 0^+} w_j(u)=1$．所以，$\bar{w}(x)$ 为 (w,s) 型．证毕！

以后称变权 $\bar{w}(x)=w(e-x)$ 为 $w(x)$ 的共轭变权．显然

$$\bar{\bar{w}}(x)=w(x)$$

由定理 6.7.1 知，若我们要获得一激励型变权只须先获得一惩罚型变权然后取其共轭 $\bar{w}$ 即可．这为我们研究提供了极大的方便．

与以往文献不同的是，我们在定义 6.7.1 中加入了公理(4)，目的是使变权综合函数 $V_p(x)$ 关于每个变元单调增加，即 $\frac{\partial V_p}{\partial x_j}>0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，显然(4)是必要的．

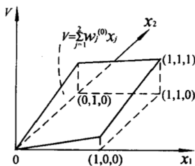


图 6.7.1　常权综合函数 V

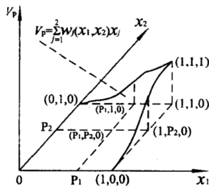


图 6.7.2　(s, w)型变权综合函数 V_p

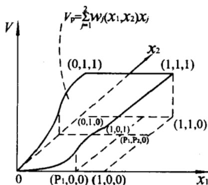


图 6.7.3　(w, s)型变权综合函数 V_p

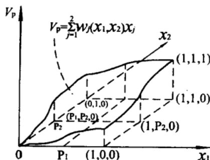


图 6.7.4　一般的变权综合函数 V_p

二、由惩罚—激励效用函数族诱导的变权

设 $w^{(0)}=(w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \cdots, w_m^{(0)})^T$ 为一常权，即满足 $\sum_{j=1}^{m}w_j^{(0)}=1$ 且 $w_j^{(0)}>0$ $(j=1, 2, \cdots, m)$；　$u(x)=(u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_m(x_m))^T\in C^2(I_m^+)$（即 $u_j(t)\in C^2(0, 1)$），记 $u'(x)=(u_1'(x_1), u_2'(x_2), \cdots, u_m'(x_m))^T$.

定理 6.7.2　设$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}\subset C^2[0, 1]$且有界，$u(x)=(u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_m(x_m))^T$，$w^{(0)}$为常权，$p\in I_m$，若满足

(1) $u'(x)>0$

(2) $u_j''(t)\begin{cases}\leqslant 0 & t<p_j \\ \geqslant 0 & t>p_j\end{cases}$ $(j=1, 2, \cdots, m)$

(3) 对任意 $j\in\{1, 2, \cdots, m\}$ 及 $x\in I_m^+$，有

$$\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)[u_j''(x_j)(x_j-x_k)+u_j'(x_j)]>0$$

则由

$$w_j(x)=\frac{w_j^{(0)} u_j'(x_j)}{\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)} \quad (j=1, 2, \cdots, m) \qquad (6.7.2)$$

构成的 $w(x)=(w_1(x), w_2(x), \cdots, w_m(x))^T$ 为以 p 为激励策略的变权.

证明 $w(x)$ 的可微性、非负性(1)、归一性(2)是显然的. 又

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}=\frac{w_j^{(0)} u_j''(x_j)\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)-[w_j^{(0)}]^2 u_j'(x_j) u_j''(x_j)}{[\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)]^2}$$

$$=\frac{w_j^{(0)} \sum_{k\neq j} w_k^{(0)} u_k(x_k)}{[\sum w_k^{(0)} u_k'(x_k)]^2} u_j''(x_j) \begin{cases}\leqslant 0 & x_j<p_j \\ \geqslant 0 & x_j>p_j\end{cases}$$

故(3)成立. 另一方面，对 $\forall\ 1\leqslant j\leqslant m$，

$$\frac{\partial V_p}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}(x^T w(x))=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{w_k^{(0)} u_k'(x_k)}{\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)} x_k\right]=$$

$$\frac{[w_j^{(0)} u_j''(x_j)x_j+w_j^{(0)} u_j'(x_j)]\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)-[\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)x_k]w_j^{(0)} u_j''(x_j)}{[\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)]^2}$$

$$=\frac{w_j^{(0)}u_j''(x_j)[\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}u_k'(x_k)(x_j-x_k)]-w_j^{(0)}u_j'(x_j)\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}u_k'(x_k)}{[\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}u_k'(x_k)]^2}$$

$$=\frac{w_j^{(0)}\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}u_k'(x_k)[u_j''(x_j)(x_j-x_k)+u_j'(x_j)]}{[\sum_{k=1}^{m}w_k^{(0)}u_k'(x_k)]^2}>0$$

即

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_k}{\partial x_j}x_k+w_j>0$$

亦即(4)成立． 证毕!

若$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$满足定理6.7.2的条件，则称(6.7.2)式给出的$w(x)$为$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$诱导出来的变权，称$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$为$w(x)$的惩罚－激励效用族，简称激励效用族．

由激励效用$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$诱导的变权有明确的涵义：$w_j^{(0)}$等表示在一般情况下人们对诸因素(子目标)相对重要性的一种认识；$u_j(t)$等则体现了人们对单因素(子目标)的诸状态的效用，即偏好程度．因此，此变权既体现了因素(子目标)的相对重要性又体现了单因素(子目标)状态的偏好．

若激励效用族$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$满足$0\leqslant u_j(t)\leqslant 1$ ($t\in(0,1)$, $j=1,2,\cdots,m$)，则称$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$是正规的．

例如，取$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$如

$$u_j(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}p_jt^2+4t\quad(j=1,2,\cdots,m)\qquad(6.7.3)$$

则$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$为一激励效用族．

定理 6.7.3 若$\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$为$w(x)$的激励效用族，则$\{M-u_j(1-t)\}_{j=1}^{m}$为$\overline{w}(x)$的激励效用族(其中M为一充分大的正数)．

证明 令 $v_j(t)=M-u_j(1-t)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$。显然 $v_j(t)$ 是有界的 $(j=1, 2, \cdots, m)$。又因为有，$v_j'(t)=[M-u_j(1-t)]'=-u_j'(1-t)\cdot(-1)=u_j'(1-t)>0$，故 $v'(x)>0$。

又 $v_j''(t)=-u_j''(1-t)$，故

$$v_j''(t)\begin{cases}>0 & 1-t<p_j\\ <0 & 1-t>p_j\end{cases}$$

即

$$v_j''(t)\begin{cases}<0 & t<1-p_j\\ >0 & t>1-p_j\end{cases}$$

此外，

$$\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} v_k'(x_k)[v_j''(x_j)(x_j-x_k)+v_j'(x_j)]$$

$$=\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(1-x_k)[-u_j''(1-x_j)(x_j-x_k)+u_j'(1-x_j)]$$

$$=\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(1-x_k)[u_j''(1-x_j)[(1-x_j)-(1-x_k))+u_j'(1-x_j)]>0$$

按对常权 $w^{(0)}$ 及 $q=e-p$，$\{v_j(t)\}_{j=1}^{m}$ 满足定理 6.7.2 条件。而它所诱导的变权如

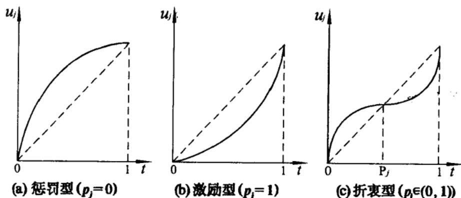
$$w_j^*(x)=\frac{w_j^{(0)}v_j'(x_j)}{\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)}=\frac{w_j^{(0)}u_j'(1-x_j)}{\sum_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(1-x_k)}$$

$$=w_j(e-x)$$

$$(j=1, 2, \cdots, m)$$

故 $w^*(x)=(w_1^*(x), w_2^*(x), \cdots, w_m^*(x))^T=(w_1(e-x), w_2(e-x), \cdots, w_m(e-x))^T=\overline{w}(x)$（其中 $w(x)$ 为 $\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$ 诱导的变权）。证毕!

变权的激励效用族具有以下三种类型，即惩罚型、激励型和折衷型，分别以图 6.7.5 (a)、(b)、(c)示之。



(a) 惩罚型($p_j=0$)　(b) 激励型($p_j=1$)　(c) 折衷型($p_j\in(0, 1)$)

图 6.7.5　激励效用函数

$w(x)$ 的激励效用族与 $\overline{w}(x)$ 的激励效用族的关系如图 6.7.6。

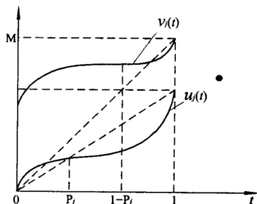


图 6.7.6　$w(x)$ 与 $\overline{w}(x)$ 的效用关系

定理 6.7.4　设 $w(x)$ 为 $\{u_j(t)\}$ 诱导出来的变权，则 $w(x)$ 为 (s, w) 型变权当且仅当对 $\forall j\in\{1, 2, \cdots, m\}$ 有 $\lim\limits_{x_j\to 0^+} u_j(x_j)=+\infty$。

证明　由于 $w(x)$ 是激励效用族 $\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$ 诱导出来的，故 $w(x)$ 具有下列形式

$$w_j(x)=\frac{w_j^{(0)}u_j'(x_j)}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}u_k'(x_k)}\qquad (j=1, 2, \cdots, m)$$

若 $\lim\limits_{x_j\to 0^+} u_j(x_j)=+\infty$，则

$$\lim_{x_j\to 0^+} w_j(x)=\lim_{x_j\to 0^+}\frac{w_j^{(0)}u_j'(x_j)}{\sum\limits_{k\neq j}w_k^{(0)}u_k'(x_k)+w_j^{(0)}u_j'(x_j)}$$

$$=\lim_{x_j\to 0^+}\frac{w_j^{(0)}u_j'(x_j)}{c+w_j^{(0)}u_j'(x_j)}=1 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

所以 $w(x)$ 为 $(s,\ w)$ 型．

反之，若对任意$j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$，有 $\lim\limits_{x_j\to 0^+}w_j=1$，那么对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<x_j<\delta$ 时，

$$\left|\frac{w_j^{(0)}u_j'(x_j)}{\sum\limits_{k=1}^{m}w_k^{(0)}u_k'(x_k)}-1\right|=\left|\frac{w_j^{(0)}u_j'(x_j)}{c+w_j^{(0)}u_j'(x_j)}-1\right|<\varepsilon$$

即

$$1-\varepsilon<\frac{w_j^{(0)}u_j'(x_j)}{c+w_j^{(0)}u_j'(x_j)}<1+\varepsilon$$

从而

$$u_j'(x_j)>\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{1}{w_j^{(0)}}\ c(1-\varepsilon)\to +\infty \quad (\varepsilon\to 0)$$

故

$$\lim_{x_j\to 0^+}u_j'(x_j)=+\infty. \qquad \text{证毕！}$$

推论 6.7.1 设 $w(x)$ 为 $\{u_j(t)\}_{j=1}^{m}$ 诱导的变权，则 $w(x)$ 为 $(w,\ s)$ 型变权当且仅当对任意 $1\leqslant j\leqslant m$ 有

$$\lim_{x_j\to 1^-}u_j(x_j)=+\infty.$$

对于由激励效用族诱导的变权，我们还可以得到

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_k}\begin{cases}\geqslant 0 & \text{当 } x_k<p_k\\ \leqslant 0 & \text{当 } x_k>p_k\end{cases}$$

定理 6.7.5 设

$$u_j(t)=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\ t^{\alpha+1}-\frac{p_j}{\alpha(\alpha-1)}\ t^{\alpha}+c_jt$$

$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，则当 $c_j\geqslant 0$，$0<p_j\leqslant 1$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 且

$\max\limits_j \dfrac{1}{1+p_j} \leqslant \alpha < 1$ 时，$\{u_j(t)\}_{j=1}^m$ 为某 (s, w) 型变权的激励效用族.

证明 只须证明 $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$ 满足定理 6.7.2 之条件 (1)、(2) 和 (3) 即可.

(1) $u_j'(t) = \dfrac{1}{\alpha} t^\alpha - \dfrac{p_j}{\alpha-1} t^{\alpha-1} + c_j > 0$

$(j=1, 2, \cdots, m)$ 即 $u'(x) > 0$.

(2) 易见

$$u_j''(t) = t^{\alpha-1} - p_j t^{\alpha-2} = t^{\alpha-1}(t-p_j) \begin{cases} \leqslant 0 & t < p_j \\ \geqslant 0 & t > p_j \end{cases}$$

$(j=1, 2, \cdots, m)$

(3) 由 $1 > \alpha \geqslant \max\limits_j \dfrac{1}{1+p_j} = \max\limits_j (1 - \dfrac{p_j}{1+p_j})$，故对一切 p_j

$$\alpha \geqslant 1 - \frac{p_j}{1+p_j}$$

故 $1-\alpha \leqslant \dfrac{p_j}{1+p_j} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{p_j}} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\alpha} \geqslant 1 + \dfrac{1}{p_j} \Rightarrow$

$$\frac{1}{1-\alpha} - 1 \geqslant \frac{1}{p_j} \Rightarrow (\frac{1}{1-\alpha} - 1) p_j \geqslant 1 \Rightarrow (\frac{1}{1-\alpha} - 1) p_j - 1 \geqslant 0$$

所以对 $0 < x_k < 1$，有

$$(\frac{1}{1-\alpha} - 1) p_j - x_j = \frac{p_j}{1-\alpha} - p_j - x_k > (\frac{1}{1-\alpha} - 1) p_j - 1 \geqslant 0.$$

因此，对任意 $1 \leqslant k \leqslant m$

$$u_j''(x_j)(x_j - x_k) + u_j'(x_j) = x_j^{\alpha-2}(x_j - p_j)(x_j - x_k) +$$

$$\frac{1}{\alpha}x_j^{\alpha}-\frac{p_j}{\alpha-1}x_j^{\alpha-1}+c_j\geqslant x_j^{\alpha-2}(x_j-p_j)(x_j-x_k)+\frac{1}{\alpha}x_j^{\alpha}-$$

$$\frac{p_j}{\alpha-1}x_j^{\alpha-1}=x_j^{\alpha}-x_j^{\alpha-1}x_k-p_jx_j^{\alpha-1}+p_jx_kx_j^{\alpha-2}+\frac{1}{\alpha}x_j^{\alpha}-$$

$$\frac{p_j}{\alpha-1}x_j^{\alpha-1}>[\frac{p_j}{1-\alpha}-p_j-x_k]x_j^{\alpha-1}\geqslant 0$$

故 $\sum_{k=1}^{m}[u_j''(x_j)(x_j-x_k)+u_j'(x_j)]w_k^{(0)}u_k'(x_k)>0$

而 $\lim_{x_j\to 0^+}w_j(x)=1$ 是显见的。　证毕!

由于激励效用族诱导的变权由于其构造简单、含义明确,并反映了变权与效用理论之间的某种联系,因此这类变权在变权分析中非常重要。以后称此类变权为 u-型变权.

三、协调原理

设 $w(x)$ 为变权, $w^{(0)}$ 为常权,我们定义因素的状态组合 x 关于 $w(x)$ 与 $w^{(0)}$ 的协调度为

$$\rho(x)=\frac{x^Tw(x)}{x^Tw^{(0)}} \tag{6.7.4}$$

若 $\rho(x)>1$, 则称 x 关于 $w(x)$ 与 $w^{(0)}$ 是协调的; 若 $\rho(x)<1$, 则称 x 关于 $w(x)$ 与 $w^{(0)}$ 是不协调的; 若 $\rho(x)=1$, 则称 x 是临界的。

易证

定理 6.7.6 x 是协调的当且仅当 $\langle x, w(x)-w^{(0)}\rangle>0$; x 是临界的当且仅当 $\langle x, w(x)-w^{(0)}\rangle=0$; x 是不协调的当且仅当 $\langle x, w(x)-w^{(0)}\rangle<0$.

定义 6.7.2 设 $w(x)$ 为变权, $w^{(0)}$ 为常权,若 $w(x^*)=w^{(0)}$, 则称 x^* 为 $w(x)$ 关于 $w^{(0)}$ 的强临界点.

显然强临界点必为关于 $w(x)$ 与 $w^{(0)}$ 的临界点.

设 $w(x)$ 为以 p $(0<p<e)$ 为激励策略的变权, $w^{(0)}$ 为常权,若

$$w(p)=w^{(0)} \tag{6.7.5}$$

则称 $w(x)$ 与 $w^{(0)}$ 是匹配的。

由于 $w_j(x)\in C^1(I_m^+)$，故 $\dfrac{\partial w_j}{\partial x_j}$ 连续（$j=1, 2, \cdots, m$）。再由变权的定义中条件(3)，有

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}\right|_p=0 \\ \left.\dfrac{\partial w_2}{\partial x_2}\right|_p=0 \\ \quad\vdots \\ \left.\dfrac{\partial w_m}{\partial x_m}\right|_p=0 \end{cases} \tag{6.7.6}$$

即 $x=p$ 为强临界点方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x_2}=0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial w_m}{\partial x_m}=0 \end{cases} \tag{6.7.7}$$

的解。

若变权 $w(x)$ 具有激励效用族 $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$，则强临界点方程(6.7.6)化为

$$\begin{cases} u_1''(x_1)=0 \\ u_2''(x_2)=0 \\ \quad\vdots \\ u_m''(x_m)=0 \end{cases} \tag{6.7.8}$$

（这里 $w(x)$ 的激励策略 $0<p<e$）。

当 $w(x)$ 的激励策略中有部分分量为 0 或 1 时 (6.7.6) 或 (6.7.7) 中只有几个方程成立．若 $p_j=0$ 则 (6.7.7) 或 (6.7.8) 中第 j 个方程换为

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}>0 \quad 或 \quad u_j''(x_j)>0$$

若 $p_j=1$，则 (6.7.7) 或 (6.7.8) 中的第 j 个方程换为

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}<0 \quad 或 \quad u_j''(x_j)<0$$

协调原理 变权 $w(x)$、激励策略 p 与常权 $w^{(0)}$ 之间具有如下关系

(1) **匹配性**：$w(p)=w^{(0)}$ （当 $0<p<e$）

(2) **强临界性**：$\left.\frac{\partial w_j}{\partial x_j}\right|_p=0$ 当 $0<p_j<1$；$\frac{\partial w}{\partial x_j}>0$ 当 $p_j=0$；$\frac{\partial w_j}{\partial x_j}<0$ 当 $p_j=1$．

协调性原理描述了变权的诸要素间的关系，是构造变权时所应遵循的一般原则，它大大地限制了构造变权的随意性．一般情况下，由专家给出反映诸因素（子目标）相对重要程度的常权 $w^{(0)}$ 和反映诸因素状态的及格水平的激励策略，然后遵循协调原理来构造变权（多为某效用函数族诱导的变权）．

定理 6.7.7 设变权 $w(x)$ 由激励效用族 $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$ 诱导，其激励策略 p 满足 $0<p<e$，$w^{(0)}$ 为常权（$\sum_{j=1}^m w_j^{(0)}=1$，是 $w_j^{(0)}>0$），则 $w(x)$ 与 $w^{(0)}$ 匹配的充分必要条件是

$$u_1'(p_1)=u_2'(p_2)=\cdots=u_m'(p_m)$$

证明 由激励效用族的定义，有

$$w_j(x)=\frac{w_j^{(0)}u_j'(x_j)}{\sum_{j=1}^m w_k^{(0)}u_k'(x_k)} \tag{6.7.9}$$

按定义，$w(x)$ 与 $w^{(0)}$ 匹配是指 $w(p)=w^{(0)}$, 即

$$w_j(p)=w_j^{(0)} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{6.7.10}$$

将(6.7.9)代入(6.7.10)式得

$$\begin{pmatrix} w_1^{(0)}-1 & w_2^{(0)} & w_3^{(0)} & \cdots & w_m^{(0)} \\ w_1^{(0)} & w_2^{(0)}-1 & w_3^{(0)} & \cdots & w_m^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1^{(0)} & w_2^{(0)} & w_3^{(0)} & \cdots & w_m^{(0)}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1'(p_1) \\ u_2'(p_2) \\ \vdots \\ u_m'(p_m) \end{pmatrix}=0 \tag{6.7.11}$$

易知(6.7.11)的系数矩阵秩为 m−1, 前 m−1个方程逐一加到最后一个方程上得到同解组

$$\begin{pmatrix} w_1^{(0)}-1 & w_2^{(0)} & \cdots & w_{m-1}^{(0)} & w_m^{(0)} \\ w_1^{(0)} & w_2^{(0)}-1 & \cdots & w_{m-1}^{(0)} & w_m^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1^{(0)} & w_2^{(0)} & \cdots & w_{m-1}^{(0)}-1 & w_m^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1'(p_1) \\ u_2'(p_2) \\ \vdots \\ u_m'(p_m) \end{pmatrix}=0 \tag{6.7.12}$$

即

$$D\begin{pmatrix} u_1'(p_1) \\ u_2'(p_2) \\ \vdots \\ u_{m-1}'(p_{m-1}) \end{pmatrix}=-w_m^{(0)}u_m'(p_m)e$$

其中 $D=\begin{pmatrix} w_1^{(0)}-1 & w_2^{(0)} & \cdots & w_{m-1}^{(0)} \\ w_1^{(0)} & w_2^{(0)}-1 & \cdots & w_{m-1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1^{(0)} & w_2^{(0)} & \cdots & w_{m-1}^{(0)}-1 \end{pmatrix}$

由初等变换法知

$$D^{-1}=-\frac{1}{w_m^{(0)}}\begin{pmatrix} w_1^{(0)}+w_m^{(0)} & w_2^{(0)} & \cdots & w_{m-1}^{(0)} \\ w_1^{(0)} & w_2^{(0)}+w_m^{(0)} & \cdots & w_{m-1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1^{(0)} & w_2^{(0)} & \cdots & w_{m-1}^{(0)}+w_m^{(0)} \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} u_1'(p_1) \\ u_2'(p_2) \\ \vdots \\ u_{m-1}'(p_{m-1}) \end{pmatrix} = -w_m^{(0)} \cdot u_m'(p_m) D^{-1} e = u_m'(p_m) e$$

即　$u_1'(p_1) = u_2'(p_2) = \cdots = u_m'(p_m)$. 以上各步可逆，故定理得证．证毕!

定理 6.7.7 是重要的．它指明了：当 $0<p<e$ 时，按协调原理确定变权的激励效用族时增加了边值条件

$$u_1'(p_1) = u_2'(p_2) = \cdots = u_m'(p_m) \tag{6.7.13}$$

从而进一步减少了随意性．如果按定理 6.7.5 所给形式构造变权的激励效用族$\{u_j(t)\}_{j=1}$时取

$$c_j = c - \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} p_j^{\alpha} \tag{6.7.14}$$

(其中　$c \geqslant \max\limits_j \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} p_j^{\alpha}$)，那么，$p$ 是

$$w_j(x) = \frac{w_j^{(0)} u_j'(x_j)}{\sum\limits_{k=1}^{m} w_k^{(0)} u_k'(x_k)} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

给出的变权的激励策略且 p、$w^{(0)}$、$w(x)$之间满足协调原理．

因此，在实际的变权综合(多目标决策)中先由专家(决策者)提出反映各因素(子目标)相对重要性的常权向量 $w^{(0)}$ 和反映各因素状态(单目标满意度)的基本水平(或及格水平)的激励策略 p，并根据强惩罚(强激励)要求(如果有的话)，按协调原理构造激励效用族$\{u_j(t)\}$ 如：

$$u_j(t) = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} t^{\alpha+1} - \frac{p_j}{\alpha(\alpha-1)} t^{\alpha} + [c - \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} p_j^{\alpha}]t$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{6.7.15}$$

从而获得能合理反映需要(观点)的变权并确定出相应的变权综合函数(如果有强激励要求则取变权为(6.7.15)诱导的变权的共轭变权进行综合即可)．更有甚者，(6.7.15)式中 α 和 c 可取为

$$\alpha=\max_j \frac{1}{1+p_j} \qquad c=\max_j \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} p_j^{\alpha} \tag{6.7.16}$$

四、多目标决策的变权方法

设 $F(y)=(f_1(y),\ f_2(y),\ \cdots,\ f_m(y))^T$，$A$ 为 R^n 中闭凸集，$f_j(y)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为 A 上的连续函数．记 $\max\limits_{y\in A} F(y)$ $\triangleq \{\max\limits_{y\in A} f_1(y),\ \max\limits_{y\in A} f_2(y),\ \cdots,\ \max\limits_{y\in A} f_m(y)\}$.

我们来考虑多目标问题

$$V-\max_{y\in A} F(y) \tag{6.7.17}$$

解(6.7.17)的方法多为采用"化多为少"方法与多属性效用分析方法[26,27,28]．但这些方法均有各自的缺点．多属性效用分析法的缺点主要是价值函数难于确定，即使采用加性函数仍还存在独立性条件验证难的问题．而"化多为少"的方法则未能充分考虑诸目标的均衡性．以线性加权和法[12]为例，采用

$$U(y)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f_j(y) \tag{6.7.18}$$

予以综合，从而将(6.7.17)化为单目标问题

$$V-\max_{y\in A} U(y) \tag{6.7.19}$$

但是在多数情况下(6.7.18)式是不合理的．首先是实际中 $f_j(y)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 均有量纲问题；其次，也是最重要的，是(6.7.18)式会造成子目标之间的互相替代而有违于子目标的不可或缺性．比如，在考虑可持续发展决策时，经济增长、生态平衡、资源永续、文化多样几大目标缺一不可．不能说环境严重恶化而采用经济高速

增长予以补偿(这样是违背可持续发展的基本观点的).

为了解决采用诸如(6.7.18)式那样的多目标综合造成的决策失真性矛盾,宜于采用强惩罚的变权综合方法来实现"化多为单"的目的(这样做可避开目标的相互替代性,而且某种意义上遵从了决策者的偏好或效用函数).

下面给出这种变权方法的技术实现. 基本步骤如下:

(1) 根据决策者的要求或向专家咨询确定子目标 $f_1(y)$, $f_2(y)$, $\cdots$, $f_m(y)$ 的相对重要性 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ ($\sum_{j=1}^{m}\lambda_j=1$, $\lambda_j>0$, $j=1, 2, \cdots, m$) 及 $f_1(y)$, $f_2(y)$, $\cdots$, $f_m(y)$ 的基本要求 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ ($0<p_j<1$, $j=1, 2, \cdots, m$).

(2) 给出压缩映射族 $\{T_j\}_{j=1}^{m}$:

$$T_j(y)=\frac{f_j(y)-\min\limits_{y\in A} f_j(y)}{\max\limits_{y\in A} f_j(y)-\min\limits_{y\in A} f_j(y)} \quad (j=1,2,\cdots,m) \qquad (6.7.20)$$

注意: 由于 A 为闭凸集、f_j 为连续函数, 故 $\max\limits_{y\in A} f_j(y)$ 与 $\min\limits_{y\in A} f_j(y)$ 都是有意义的.

(3) 取 $\alpha=\max\limits_{j}\frac{1}{1+p_j}$, $c=\max\limits_{j}\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}p_j^{\alpha}$

令

$$u_j(t)=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}t^{\alpha+1}-\frac{p_j}{\alpha(\alpha-1)}t^{\alpha}+\left[c-\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}p_j^{\alpha}\right]t$$

(4) 作变权单目标函数

$$U_p(y)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j u_j'(T_j(y))}{\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k u_k'(T_k(y))}T_j(y) \qquad (6.7.21)$$

化多目标问题(6.7.17)为单目标问题

$$V=\max_{y\in A} U_p(y) \tag{6.7.22}$$

由$f_j(y)$及$T_j(t)$的连续性及A的闭凸性知，单目标问题(6.7.22)有解，其具体解法依照单目标极值问题求解.

参考文献

1 Wang, P. Z.. A Factor Space Approach to Knowledge Representation. Fuzzy Sets and Systems, 1990; 36: 113—124

2 Li, H. X.. Multifactorial Functions in Fuzzy Sets Theory. Fuzzy Sets and Systems, 1990; 35: 69—84

3 汪培庄,李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机. 北京: 科学出版社, 1996

4 汪培庄. 因素空间与概念描述. 软件学报, 1992; 1(1): 30—40

5 Wang, P. Z. and Lee, E. S.. A Conbinatorial Formula. JMAA. 1991; 160(2): 500—503

6 汪培庄,李洪兴. 知识表示的数学理论. 天津: 天津科学技术出版社, 1994

7 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(I). 北京师范大学学报(自然科学版), 1996; 32(4)

8 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(II). 北京师范大学学报(自然科学版), 1997; 33(1)

9 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(III). 系统工程学报, 1996; 11(4)

10 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架. 系统工程

学报，1997; 12(1)
11 李洪兴．因素空间理论与知识表示的数学框架(VII)．模糊系统与数学，1995; 9(2): 16—24
12 李洪兴．因素空间理论与知识表示的数学框架(VIII)．模糊系统与数学，1995; 9(3): 1—9
13 李洪兴．因素空间理论与知识表示的数学框架(IX)．模糊系统与数学，1996; 10(3)
14 李洪兴．因素空间理论与知识表示的数学框架(X)．模糊系统与数学，1996; 10(4)
15 李洪兴．因素空间理论与知识表示的数学框架(XI)．模糊系统与数学，1997; 11(1)
16 李洪兴．因素空间理论与知识表示的数学框架(XII)．模糊系统与数学，1997; 11(2): 1—9
17 刘文奇．系统摄动估计．系统工程理论与实践，1990; 10(4): 5—11
18 刘文奇．均衡函数及其在变权综合中的应用．系统工程理论与实践，1997; 17(4): 58—74
19 刘文奇．变权综合中的惩罚—激励效用．系统工程理论与实践，1998; 18(4): 41—47
20 刘文奇．变权综合的激励策略及其解法．系统工程理论与实践，1998; 18(12): 40—43
21 汪培庄．模糊集与随机集落影．北京：北京师范大学出版社，1985
22 刘文奇．变权的一般原理与多目标决策．系统工程理论与实践，1999; 19(6)
23 刘文奇，何湘藩等．变权方法在可持续发展评价中的应用．见：顾基发主编，系统工程与可持续发展战略，中国系统工程学会第

十届年会，广州，北京：科学技术文献出版社，1998: 41—45
24 祝李红．水泥熟料质量的变权综合指标．水泥，1998; No.5
25 张正华,刘文奇．城市发展水平的惩罚型变权综合指数．见：顾基发主编，系统工程与可持续发展战略，中国系统工程学会第十届年会，广州，北京：中国科学技术出版社，1998: 389—394
26 陈挺、决策分析、北京：科学出版社，1987
27 钱颂迪主编．运筹学(修订版)．北京：清华大学出版社，1990
28 Zeleng, M.. Linear Multiobjective Programming. Springer-Verlag, 1970
29 Anthony, L. P. *et al*. The Mathematics of Nonlinear Programming. Springer-Verlag, 1988